図形自動生成ソフトウェアの開発とその教育効果に関する一検討

齊　藤　　実

1. はじめに

STEM という言葉の端緒は、1990 年代にアメリカ国立科学財団（NSF）が用い始めたところにある。STEM は、Science, Technology, Engineering and Mathematics の略語であり、その構成分野については、アメリカ国立科学財団（NSF）が策定するガイドラインによると、数理科学・計算機科学・情報科学・生命科学・物理学・化学・工学・数学など、いわゆる理数系の多分野に及ぶ。

そして、STEM 教育とは、上記 STEM 領域の教育・学習に関するものである。これらの教育は全世界的に非常に重要視されている。オバマ大統領も一般教書演説等 (1) で国家の優先課題のひとつとして取り上げている。もちろん、我が国でも、これらの理数系の教育を強化することで、科学技術及びビジネス分野で国際競争力を強化できると考え、政府主導の各種方策などが企画実施されている (2)(3)。

本論では、STEM 教育の一実践例として、専用ソフトウェアを用いた数学教育とその実施結果について考察している。まず、数学のうち図形に関する理解を深めることを目的として開発した図形自動生成ソフトウェアの詳細について説明している。このソフトウェアを用いた典型的ないくつかの図形の描画などを通じて、どの程度の教育効果があるのかを調べた結果について述べる。

2. 図形自動生成ソフトウェアについて

2.1 概要

図形自動生成ソフトウェアは、Excel VBA を用いて作成したプログラムである。

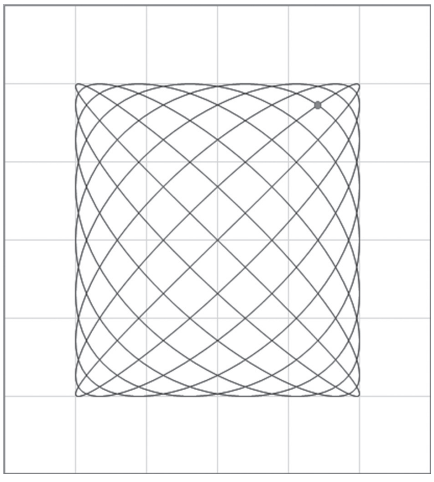
このソフトウェアは、基本的な三角関数・リサージュ図形・フラクタル図形・3 次元ローレンツモデル・シェルピンスキーのギャスケットなどの多岐にわたる図形をパソコン画面上に簡単な操作で描画できる図形生成プログラムの集合体である (4)(5)。

いずれの図形も初心者にもスピンボタンやスクロールバーにより、パラメータなどの変更でダイナミックに連続的に変化させることができる。このことにより、図形の数学的な意味づけなどの理解を大いに助けるものとなっている。

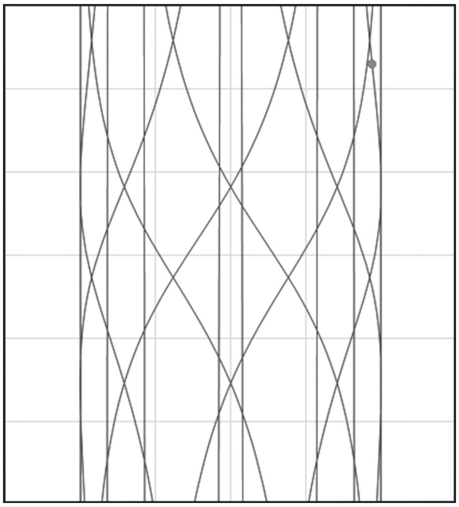
以下に、本図形自動生成ソフトウェアによっ

●リサージュ図形

① COS−SIN グラフ



② COS-TAN グラフ



2.2　典型的な描画図形の例

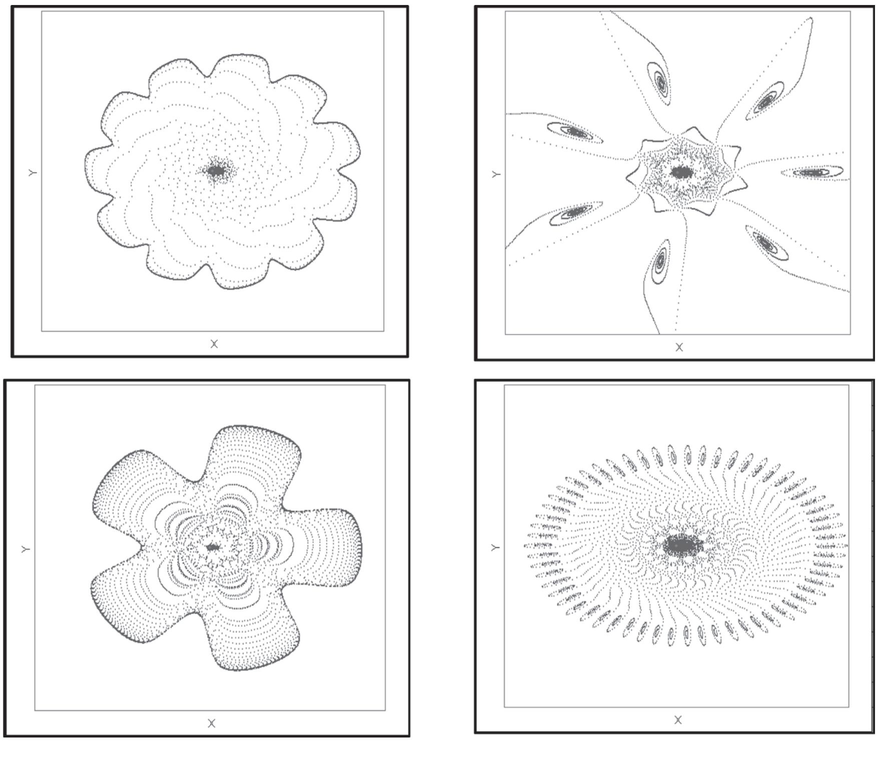
2.2.1　グモウスキー・ミラ写像

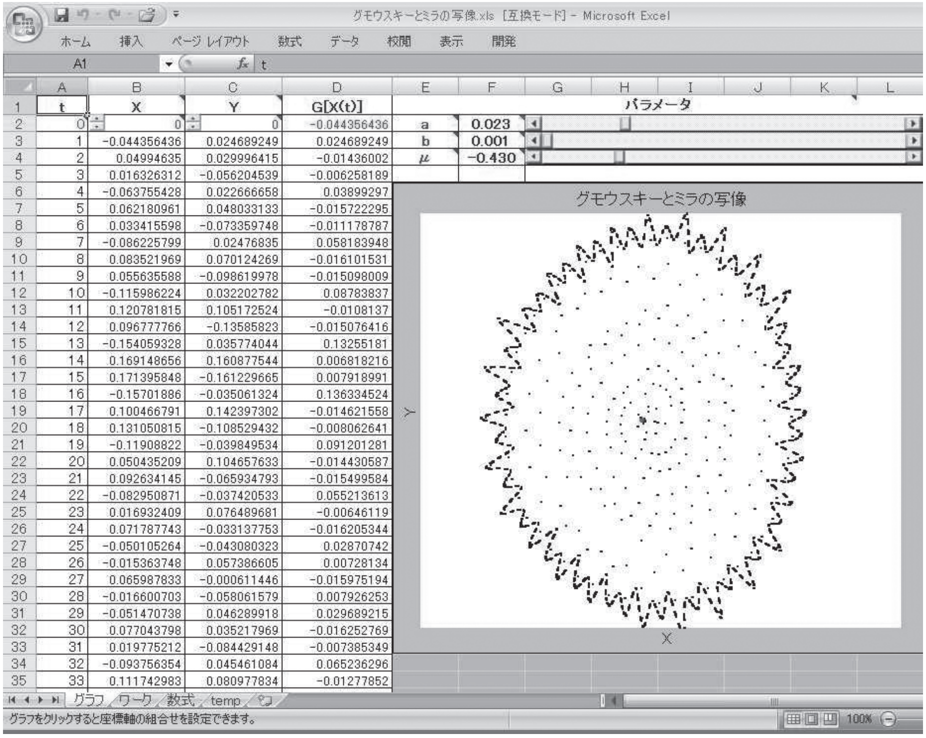
1958 年、イーゴリ・グモウスキーとクリスチャン・ミラはトゥルーズ電子科学技術・流体科学大学の研究所で非線形力学系の研究を始めた。1966 年から 1976 年にかけて、グモウスキーはジュネーブの CERN において、加速器あるいは蓄積リング内での粒子の横方向の運動を写像で表現し、次の式を示した。

なお、このグモウスキー・ミラ写像の図形にて、描画したリサージュ図形、グモウスキーとミラの写像、3 次元ローレンツモデル、シェルピンスキーのギャスケットなどのその他の図形の典型例を以下に表す。

$$x(t+1) = y(t) + a\left[1 - by^2(t)\right]y(t) + G\left[x(t)\right]$$
$$y(t+1) = -x(t) + G\left[x(t+1)\right]$$
$$G\left[x(t)\right] = \mu x(t) + \frac{2(1-\mu)x^2(t)}{1+x^2(t)}$$

●グモウスキーとミラの写像（2.2.1 項参照）

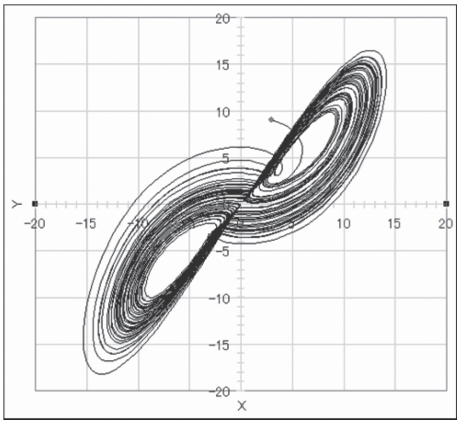




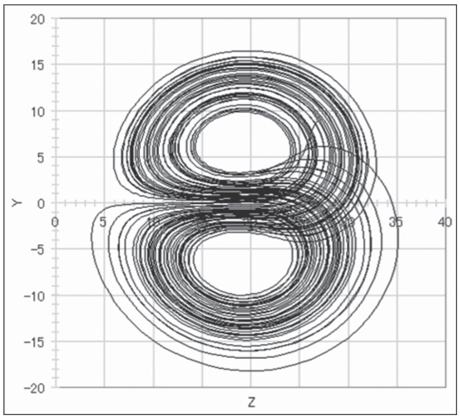
t	X	Y	G[X(t)]
0	0	0	−0.044356436
1	−0.044356436	0.024689249	0.024689249
2	0.04994635	0.029996415	−0.01436002
3	0.016326312	−0.056204539	−0.006258189
4	−0.063755428	0.022666658	0.03899297
5	0.062180961	0.048033133	−0.015722295
6	0.033415598	−0.073359748	−0.011178787
7	−0.086225799	0.02476835	0.058183948
8	0.083521969	0.070124269	−0.016101531
9	0.055635588	−0.098619978	−0.015098009
10	−0.115986224	0.032202782	0.08783837
11	0.120781815	0.105172524	−0.0108137
12	0.096777766	−0.13585823	−0.015076416
13	−0.154059328	0.035774044	0.13255181
14	0.169148656	0.160877544	0.006818216
15	0.171395848	−0.161229665	0.007918991
16	−0.15701886	−0.035061324	0.136334524
17	0.100466791	0.142397302	−0.014621558
18	0.131050815	−0.108529432	−0.008062641
19	−0.11908822	−0.039849534	0.091201281
20	0.050435209	0.104657633	−0.014430587
21	0.092634145	−0.065934793	−0.015499584
22	−0.082950871	−0.037420533	0.055213613
23	0.016932409	0.076489681	−0.00646119
24	0.071787743	−0.033137753	−0.016205344
25	−0.050105264	−0.043080323	0.02870742
26	−0.015363748	0.057386605	0.00728134
27	0.065987833	−0.000611446	−0.015975194
28	−0.016600703	−0.058061579	0.007926253
29	−0.051470738	0.046289918	0.029689215
30	0.077043798	0.035217969	−0.016252769
31	0.019775212	−0.084429148	−0.007385349
32	−0.093756354	0.045461084	0.065236296
33	0.111742983	0.080977834	−0.01277852

● 3 次元ローレンツモデル（2.2.2 項参照）

X−Y 座標



Z−Y 座標



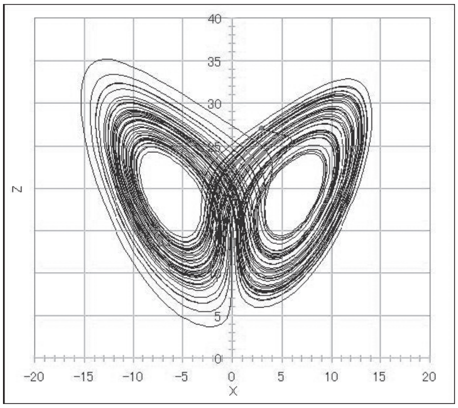
関しては、「カオスはこうして発見された」（ラルフ・上田　共立出版）に関係するいくつかの図形が掲載されている [6]。

以下に、本プログラムを用いたグモウスキー・ミラ写像の作図例を示す。上記数式の各種パラメータを自在に変化させせることにより、さまざまな図家に変形できることが分かる。

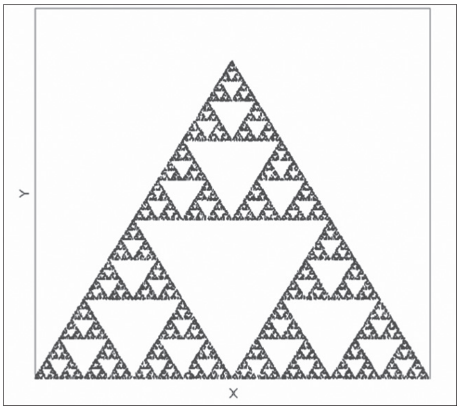
2.2.2　3 次元ローレンツモデル

マサチューセッツ工科大学の気象学者、エドワード・N・ローレンツ（Edward N. Lorenz）は、流体の対流現象の研究のため、流体力学に

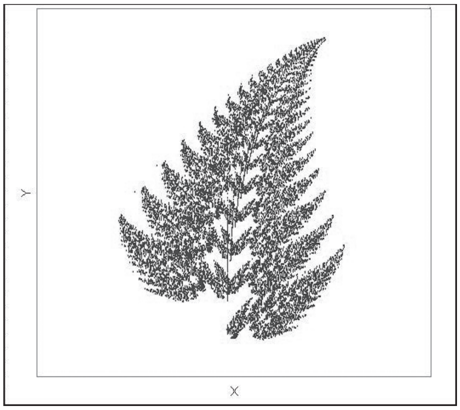
X−Z 座標



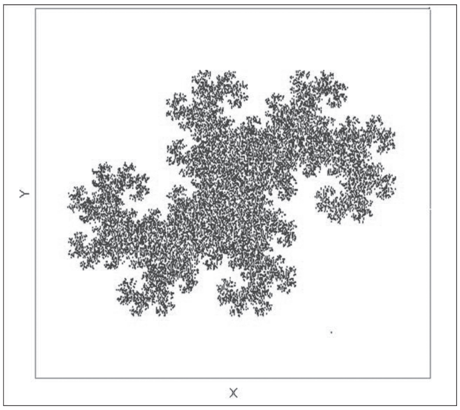
●シェルピンスキーのギャスケット（2.2.3 項参照）



●シダ（反復関数系を用いたシダ状の画像計算図形の例）



●双龍形（反復関数系を用いたドラゴン状の画像計算図形の例）



$$\frac{dX}{dt} = -aX + aY$$
$$\frac{dY}{dt} = -XZ + gX - Y$$
$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ$$

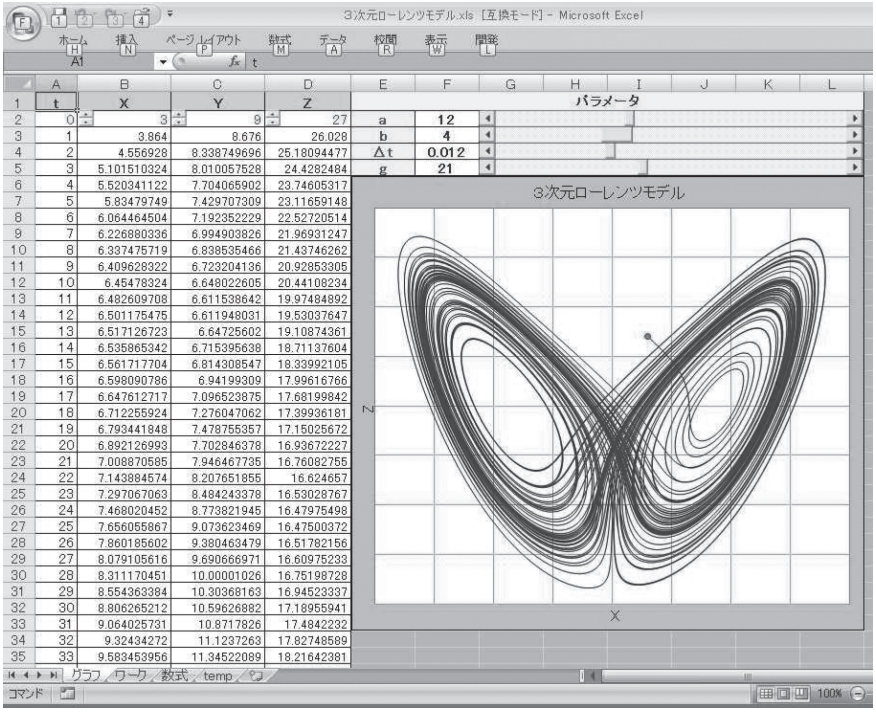
⇒ **離散化**

$$X_{i+1} = X_i + \Delta t(-aX_i + aY_i)$$
$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta t(-X_i \times Z_i + gX_i - Y_i)$$
$$Z_{i+1} = Z_i + \Delta t(X_i \times Y_i - bZ_i)$$

おけるナビエ - ストークス方程式から次の 3 変数の連立微分方程式を導き、解のふるまいを調べた。方程式のふるまいについては、ローレンツ氏の論文「決定論的非周期な流れ（Deterministic Nonperiodic Flow）」（1963）の中で開示している。簡単に述べると、入道雲の構造をモデル化しようとして、容器に入れた水を下から温めた時に起きる対流（ベナール対流）を以下のように数式化したものである [(5)]。これは、後のさまざまなカオス研究の端緒となったものといえる。

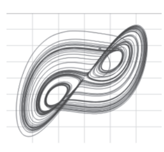
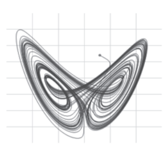
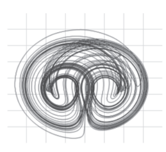
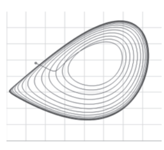
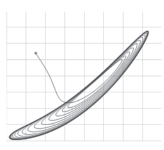
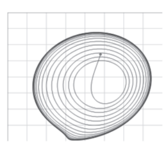
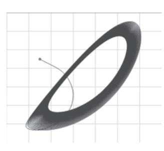
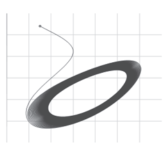
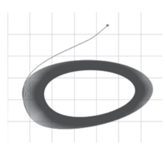
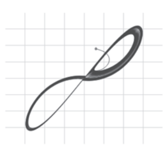
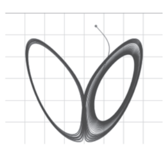
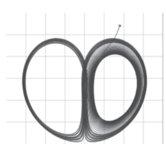
以下に、本プログラムを用いた 3 次元ローレ

3 次元ローレンツモデルの表とグラフの具体例



	A	B	C	D
1	t	X	Y	Z
2	0	3	9	27
3	1	3.864	8.676	26.028
4	2	4.556928	8.338749696	25.18094477
5	3	5.101510324	8.010057528	24.4282484
6	4	5.520341122	7.704065902	23.74605317
7	5	5.83479749	7.429707309	23.11659148
8	6	6.064464504	7.192352229	22.52720514
9	7	6.226880336	6.994903826	21.96931247
10	8	6.337475719	6.838535466	21.43746262
11	9	6.409628322	6.723204136	20.92853305
12	10	6.45478324	6.648022605	20.44108234
13	11	6.482609708	6.611538642	19.97484892
14	12	6.501175475	6.611948031	19.53037647
15	13	6.517126723	6.64725602	19.10874361
16	14	6.535865342	6.715395638	18.71137604
17	15	6.561717704	6.814308547	18.33992105
18	16	6.598090786	6.94199309	17.99616766
19	17	6.647612717	7.096523875	17.68199842
20	18	6.712255924	7.276047062	17.39936181
21	19	6.793441848	7.478755357	17.15025672
22	20	6.892126993	7.702846378	16.93672227
23	21	7.008870585	7.946467735	16.76082755
24	22	7.143884574	8.207651855	16.624657
25	23	7.297067063	8.484243378	16.53028767
26	24	7.468020452	8.773821945	16.47975498
27	25	7.656055867	9.073623469	16.47500372
28	26	7.860185602	9.380463479	16.51782156
29	27	8.079105616	9.690666971	16.60975233
30	28	8.311170451	10.00001026	16.75198728
31	29	8.554363384	10.30368163	16.94523337
32	30	8.806265212	10.59626882	17.18955941
33	31	9.064025731	10.8717826	17.4842232
34	32	9.32434272	11.1237263	17.82748589
35	33	9.583453956	11.34522089	18.21642381

3 次元ローレンツモデルの作図の具体例

a	b	Δ t	g	X—Y座標	X－Z座標	Y－Z座標
5	2	0.035	17.5			
4	5	0.032	19			
13	5	0.026	12.5			
17	5	0.022	14			

ンツモデルの作図例を示す。上記数式の各種パラメータを自在に変化させることにより、さまざまな図家に変形できることが分かる。

2.2.3　シェルピンスキーのギャスケット

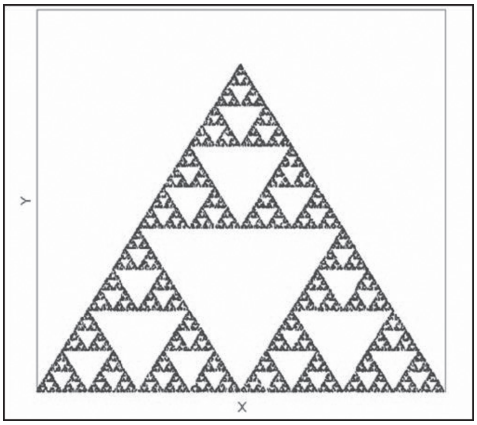
シェルピンスキーのギャスケット（Sierpinski gasket）は、フラクタル図形の代表例のひとつである。フラクタルは、数学者ブノワ・マンデルブロが提起したラテン語 fractus による幾何学のひとつの大きな概念である[7]。フラクタル図形とは、端的に表現すると、ある図形の部分と全体が自己相似になっているものをいう。近似的なフラクタルな図形は、自然界のあらゆるものに見られ、コンピュータ・グラフィックスにおけるオブジェクトの生成のアルゴリズムとして用いられることも多い。もちろん、数学的な意味で厳密なフラクタル図形は自然界ではありえず、近似形である。フラクタル図形の典型的な例としては、このシェルピンスキーのギャスケットの他に、コッホ曲線・高木曲線・ヒルベルト曲線･メンガーのスポンジなどがある。

このシェルピンスキーのギャスケットは著名なフラクタル図形の一種であり、自己相似的な無数の三角形からなる図形である。ポーランドの数学者ヴァツワフ・シェルピンスキに由来する。本来、シェルピンスキーのギャスケットはフラクタル図形の一種であるため、パソコン画面上に正確に作図することは厳密には不可能だが､次の処理を連続的に繰り返すことによって、近似的な図形を作図できる。

①１辺の長さが１の正三角形の各辺の中点を互いに結ぶと、中心部に１辺の長さが 1/2 の正三角形ができる。

②この１辺の長さが 1/2 の正三角形を切り取る。

③これによって、１辺の長さが 1/2 の正三角形が３個残る。



反復関数系

（１）　$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix}$

（２）　$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$

（３）　$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$

④これら３つの正三角形の各辺の中点を互いに結んで出来た長さが 1/4 の正三角形を切り取る。

⑤これによって１辺の長さが 1/4 の正三角形が９個残る。

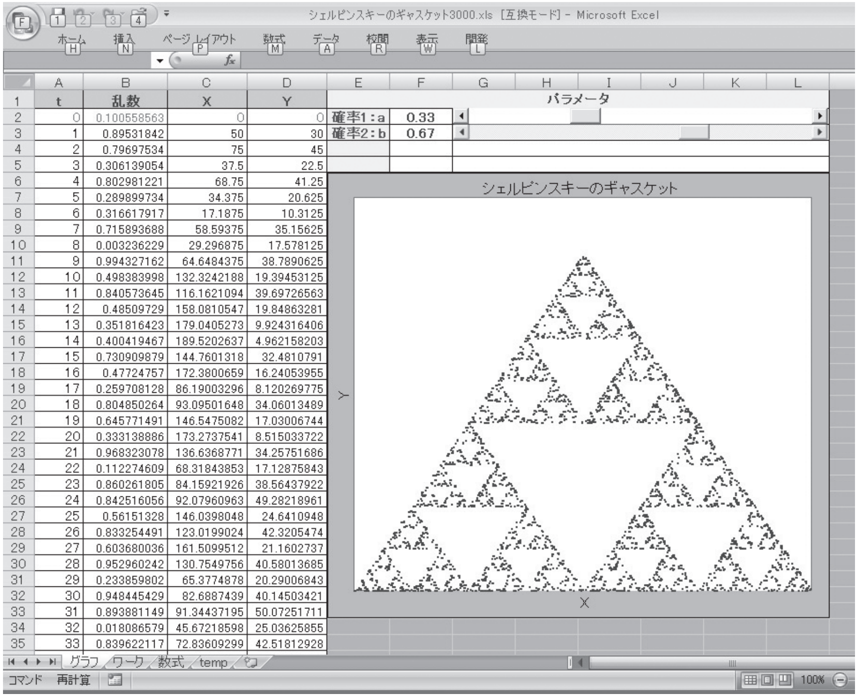
⑥同様に手順をくりかえすと、n 回目には正三角形が 3n 個残る。

上記の処理を繰り返すことにより、n →∞とした極限の結果、いわゆるシェルピンスキーのギャスケットと称される図形になる。

2.3　シェルピンスキーのギャスケット図形操作に関する具体例

図形自動生成ソフトウェアを利用した前述のシェルピンスキーのギャスケット図形に関する操作について説明する。以下に、数式を例にし

シェルピンスキーのギャスケットの表とグラフの具体例



t	乱数	X	Y
0	0.100558563	0	0
1	0.89531842	50	30
2	0.79697534	75	45
3	0.306139054	37.5	22.5
4	0.802981221	68.75	41.25
5	0.289899734	34.375	20.625
6	0.316617917	17.1875	10.3125
7	0.715893688	58.59375	35.15625
8	0.003236229	29.296875	17.578125
9	0.994327162	64.6484375	38.7890625
10	0.498383998	132.3242188	19.39453125
11	0.840573645	116.1621094	39.69726563
12	0.48509729	158.0810547	19.84863281
13	0.351816423	179.0405273	9.924316406
14	0.400419467	189.5202637	4.962158203
15	0.730909879	144.7601318	32.4810791
16	0.47724757	172.3800659	16.24053955
17	0.259708128	86.19003296	8.120269775
18	0.804850264	93.09501648	34.06013489
19	0.645771491	146.5475082	17.03006744
20	0.333138886	173.2737541	8.515033722
21	0.968323078	136.6368771	34.25751686
22	0.112274609	68.31843853	17.12875843
23	0.860261805	84.15921926	38.56437922
24	0.842516056	92.07960963	49.28218961
25	0.56151328	146.0398048	24.6410948
26	0.833254491	123.0199024	42.3205474
27	0.603680036	161.5099512	21.1602737
28	0.952960242	130.7549756	40.58013685
29	0.233859802	65.3774878	20.29006843
30	0.948445429	82.6887439	40.14503421
31	0.893881149	91.34437195	50.07251711
32	0.018086579	45.67218598	25.03625855
33	0.839622117	72.83609299	42.51812928

てパラメータ表と描画グラフに関する具体的な操作手順の一例を示す。

以下に、具体的な操作手順を示す。本プログラムを起動後、以下のような簡単な操作によって、シェルピンスキーのギャスケット図形を簡単に描画できる。

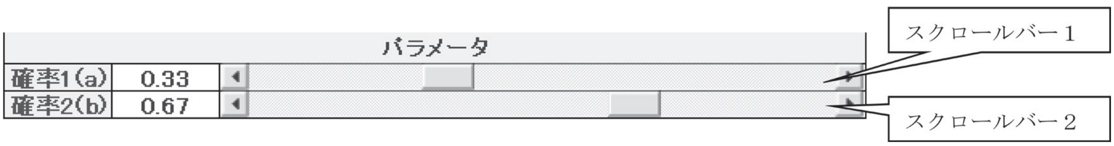
(1) プログラムを起動する

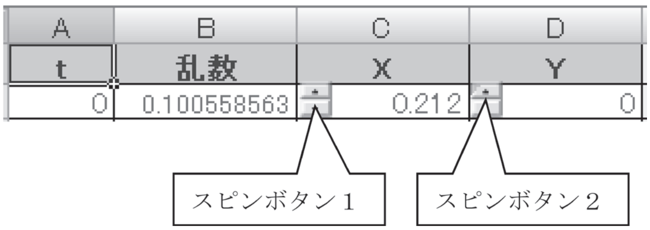
Excel ファイル“シェルピンスキーのギャスケット．xls”を開く。

(2) パラメータを変更する

パラメータ (a、b) はスクロールバー1、2で変更する。

(3) 初期値を変更する





初期値X（0)、Y（0）はスピンボタン1，2で変更する。

（4）初期値の範囲を変更する

①Xの初期値の範囲

タイトル“X”をダブルクリック

②Yの初期値の範囲

タイトル“Y”をダブルクリック

（5）初期値を自動的に連続変化させる

①セルB2を右クリック：Xの初期値（X0）を現在値から最大値まで自動的に増加させる。

②セルB2をダブルクリック：Xの初期値（X0）を現在値から最小値まで自動的に減少させる。

③セルC2を右クリック：Yの初期値（Y0）を現在値から最大値まで自動的に増加させる。

④セルC2をダブルクリック：Yの初期値（Y0）を現在値から最小値まで自動的に減少させる。

（6）初期値の自動変更を停止する

自動変更中にグラフをクリックすると停止する。

本プログラムにおいて、パラメータ（a、b）をスクロールバー1、2で変更することによって、シェルピンスキーのギャスケットの図形を自由自在に生成できる。

3. 学生アンケート結果

この図形自動生成ソフトウェアに関係する授業を受講していた学生を被験者として、PC実習室設置のPCおよび貸与ノートPCで使用してもらった。もちろん、その際、必要な数学的な解説も施しながら、各自のPCで図形自動生成ソフトウェアの操作を行わせた。その結果、以下のような観点からアンケートを実施した。

【アンケート・ポイント】

○数学的に著名な図形に関する基本知識がどの程度あるか？
（双曲線･リサージュ図形･フラクタル図形･シェルピンスキー図形など）

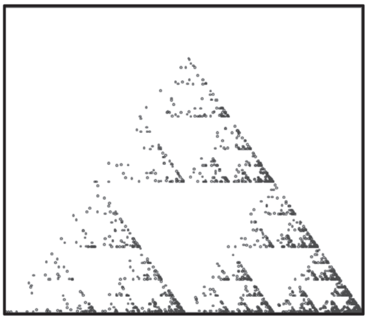
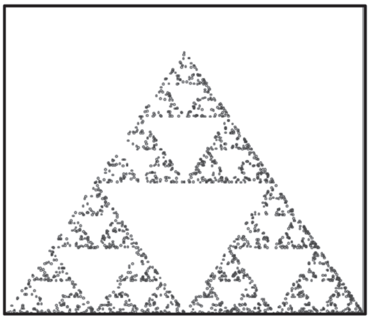
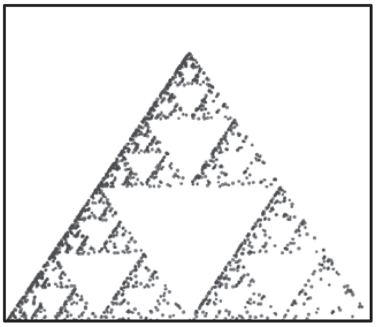
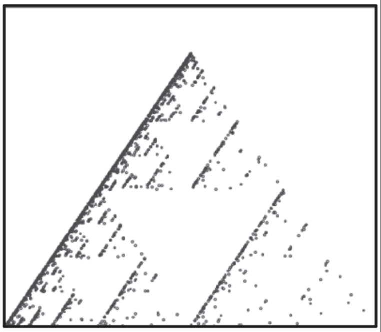
○本図形自動生成ソフトウェアをパソコン実習授業で使ってみて、授業内容への理解がどのくらい深まったか？

○本図形自動生成ソフトウェアのような簡単に使えるソフトウェアを用いたPC実習があるとしたら体験してみたいか？

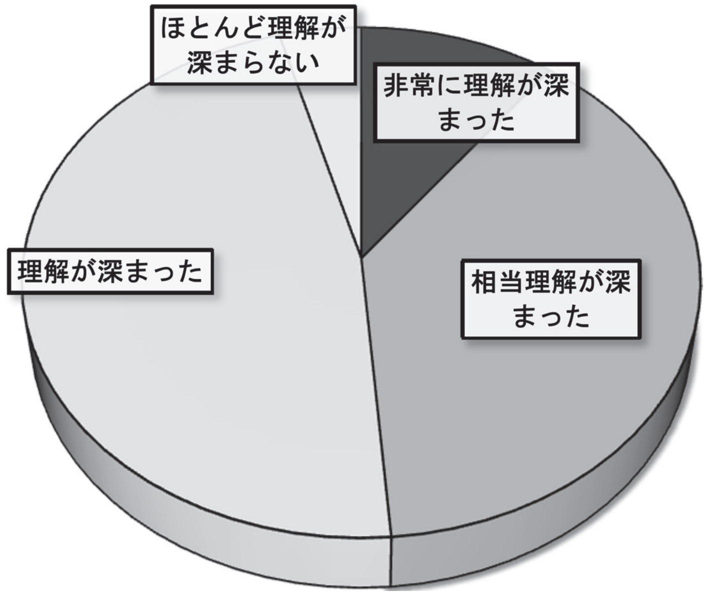
○本図形自動生成ソフトウェアにさらに望む機能にはどのようなものがあるか？

過去3年間に本学3・4年生の被験者約240名に本図形自動生成ソフトウェアをパソコン実習授業にて用いてもらった結果、以下のようなアンケート結果の概要を得ることができた。

【アンケート結果の概要】

確率 1(a)	確率 2(b)	グラフ
0. 2	0. 8	
0. 3	0. 7	
0. 4	0. 6	
0. 45	0. 55	

本図形自動生成ソフトウェア利用による授業理解度



・双曲線、リサージュ図形などの図形に関する知識は多くの学生が持っているが、フラクタル図形・シェルピンスキー図形などの数学的には著名な図形への知識は少ないことが分かった。
・本図形自動生成ソフトウェアをパソコン実習授業での利用を通じて、授業内容への理解が深まったという意見が大多数であった（下図）。
・他にも本図形自動生成ソフトウェアのように、比較的簡単に取り扱えるソフトウェアがあれば使ってみたいという意見が多かった。
・追加機能として望むことについては、操作上の使い勝手の改善や数学的な内容の深さをより分かりやすく実感できるような図形的な美しさや３次元表現などの工夫があると更に良かった。

4. まとめ

図形自動生成ソフトウェアの数学系授業への活用とアンケート評価を通じて、学生諸君の数学に関する理解の助けになるとともに興味をもつ契機ともなることが明らかになった。

前述したSTEM分野すなわち理数系分野の重要性は改めて言うまでもなく、今後とも更に一層高まるであろう。これらの中でも基本中の基本はやはり『数学』である。このような基礎学問を真摯に学ぶ学生を増やしたいものである。本論文において記述したひとつの試みが、微力ながらその一助になれば幸いである。

【謝辞】

本論文にて利用した図形自動生成ソフトウェアの趣旨をご理解いただき、設計・開発していただいた長岡システム設計事務所・代表の長岡譲一氏に深く感謝いたします。

〈参考文献等〉

(1) http://www.scte.org/SCTE/About/STEM/SCTE/About/SCTE_STEM_Education_and_Career_Initiatives.aspx?hkey = f8efdb7e-fd9d-4c51-96db-98767be532cb

(2) 文部科学省、平成21年版科学技術白書、第1部　第3章

(3) 文部科学省、ICT教育ニュース、http://ict-enews.net/about/

(4) 松下　貢、「フラクタルの物理（I）」、裳華房、2002

(5) E.N.Lorentz, J.Atom.Sci,40,130. 1963

(6) ラルフ・エイブラハム、ヨシスケ・ウエダ、「カオスはこうして発見された」、共立出版、2002

(7) 小森洋平、「無限をみつめるフラクタル幾何の世界」、数学セミナー、2001年2月号