

グラフ理論による構造と順序の数学的表現

Mathematical Models of a Structure and a Sequence Based on Graph Theory

河西 秀夫*

Hideo KASAI

【概要】

複数の事象が存在する場合、事象間の関係は二項関係 $xR_{\#}y$ で表すことができる。また、事象間の形成順序は順序関係で表現できる。この関係はラベル付き有向グラフで図示することができる。事象間の関係を構造と定義し、この構造を図示するグラフを構造グラフ $G=(V, R_{\#}, \phi_V, \phi_A)$ と称した。 V は対称とする事象の集合である。 ϕ_V は頂点のラベルに事象名を関連づける写像、 ϕ_A は弧に関係の名称を対応付ける写像である。また、事象の形成順序を表現する順序を表すグラフを順序グラフ $S=(V, U^*, \phi_V, \phi_A)$ と称した。事象 x の形成順序が y よりも前にある場合、 xUy と書く。 U^* は U の反射的かつ推移的閉包である。 V の各元を $C_iU^*C_j \Rightarrow i \leq j$ になるように番号を付けることができる。 U^* が全順序になる場合、 C_1, C_2, \dots, C_m は形成順序をあらわす。また事象を同値類を使用してグループ化する場合もある。同値類を使用した二項関係は $[x]R^{\#}[y]$ である。 $[x]$ は x を代表元とする同値類である。同値類を使用した順序グラフは $S=(V/E^*, U^*, \phi_V, \phi_A)$ になる。 V/E^* も半順序であり、 V/E^* の各元を $C_iU^*C_j \Rightarrow i \leq j$ になるように番号を付けることができる。 U^* が全順序になる場合、 C_1, C_2, \dots, C_m は形成順序をあらわす。

【キーワード】

二項関係、同値類、ラベル付き有向グラフ、構造、形成順序

1. 始めに

複数の事象が存在する場合、事象間の関係や事象の形成順序が問題になることがある。2つの事象間の関係は二項関係で表すことができる。また、複数の事象が存在する場合、相互の関係も二項関係で表すことができる。事象間の形成順序は順序関係で表現できる。複数の事象相互に関係がある場合、必ずしも順序関係があ

るとは限らない。事象間相互の関係を構造とし、形成順序と区別した。関係性には方向があるものとないものがある。方向性がある関係と半順序関係はラベル付き有向グラフを使用して図示できる。本文では、事象間の関係と事象間の形成順序をラベル付き有向グラフで表現する方法と理論背景を検討した。

2. グラフ理論による構造の表現

2-1. ラベル付き有向グラフの概要

集合 A と B が存在し、 x を A の元、 y を B の元とする。 A と B の直積 H は

$$H = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

である。

H を直積 $A \times B$ における二項関係であるという。

2つの事象 x と y があり、 x と y の間に何らかの関係 R があるとす。これは x と y の2つの間の関係なので二項関係になり、 $R(x, y)$ あるいは xRy と表現される。例えば、 x と y の間に親子関係 P がある場合、 $P(x, y)$ あるいは xPy である。この関係はグラフ G を使用して表現できる。一般に、 $V = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ を対象となる事象の集合、 M を V 上の二項関係とする。 n は元の数である。直積 $V \times V$ は

$$V \times V = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in V, v_j \in V\}$$

であり、 M は $V \times V$ の部分集合となる。 (v_i, v_j) は v_i と v_j の並んでいる順序に意味があるので、順序対と呼ばれる。

グラフ G は順序対 (V, A) で抽象的に定義される。すなわち、

$$G = (V, A)$$

である。このとき、 V の要素を頂点という。 A の要素である順序対を辺とよび、 (v_i, v_j) あるいは $v_i v_j$ と表記される。 $v_i \neq v_j$ のとき $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$ である場合、グラフ G は有向グラフとなり、辺は弧と呼ばれる。弧 (v_i, v_j) は、通常、 $v_i v_j$ と略記され、 v_i は弧 $v_i v_j$ の始点、 v_j は弧 $v_i v_j$ の終点とよばれる。弧は矢印で表される。矢印の向きは始点から終点の方向である。始点と終点が同じ弧をループという。幾何学的には、有向グラフ G は標識づけられた点の集合 V と、各2点の間にある矢印の集合 A とで図示されるまた、各頂点と各弧に名前や性質などのラベルを付けたものをラベル付き有向グラフという。任意の頂点間に弧が存在するグラフを連結グラフという。

ラベル付き有向グラフ G は頂点の集合 V と弧の集合 A 、接続関数 ϕ_G, ϕ_A, ϕ_v を使用して次のようにも表される。

$$G = (V, A, \phi_G, \phi_A, \phi_v)$$

接続関数 ϕ_G は頂点の順序対 (v_i, v_j) を弧に対応させる関数である。 ϕ_A は弧にラベルに対応させる関数である。弧のラベルの集合を B とすると、 ϕ_A は順序対 (v_i, v_j) 、即ち弧に関係の名称の集合 B の元の1つを対応付ける写像： $R \rightarrow B$ である。 ϕ_v は頂点に事象の何前の集合 C の元の1つを対応付ける写像： $R \rightarrow C$ である。

ϕ_G を省略して

$$G = (V, A, \phi_A, \phi_v)$$

と表記することもある。本文ではこの表記方法を使用する。

グラフ G の頂点の数を G の位数といい、 $|V(G)|$ で表す。

ある頂点 v_i を始点とする弧の数を頂点 v_i の出次数といい、終点とする弧の数を入次数という。

有向グラフ G の任意の2頂点間に道がある場合、 G は連結であるといい、連結でないグラフは非連結であるという。また、2つの頂点間に1方向の道が存在する場合片方向連結であるという。弧を持たない頂点だけからなるグラフを空グラフといい、その頂点を孤立点という。

任意の有向グラフ G が与えられたとき、 G の歩道とは、 $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{m-1} v_m$ の形をした弧の有限列 (Wilson, 1996 Tuttl, 2001) または $v_1, v_1 v_2, v_2, v_2 v_3, v_3, \dots, v_{m-1}, v_{m-1} v_m, v_m$ の形をした頂点と弧の有限列 (Bondy and Murty, 2008;) である。 $v_i v_j$ は頂点 v_i と v_j を連結する弧である。この列を v_1 から v_m への歩道、または $v_1 - v_m$ 歩道という。また、Diestelは頂点のみを使用して $v_1 v_2 v_3 \dots v_k$ と表している。

Wilsonは歩道を弧のみで表し、Distellは頂点のみで表し、Bondy and Murtyは歩道を頂点と弧で表している。このとき、 v_1 をその歩道の始点とよび、 v_m をその歩道の終点とよぶ。すべて

の辺が異なる歩道を小道、すべての頂点が異なる小道を道という。 v_i を始点、 v_j を終点とする道を v_i - v_j 道という。 v_i - v_j 道の長さは道内の弧の数である。始点と終点が同じ頂点である道を閉路という。

特に有向グラフの道を有向道という。本文では、以下、 v_1 から v_m への道 P をBondy and Murtyに従って、頂点と弧を使用して、

$$P = (v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, \dots, v_{m-1}, v_{m-1}v_m, v_m) \quad (1)$$

と書くことにする。ラベル付き有向グラフの場合、弧のラベルを使用して道 P' を

$$P' = (v_1, \phi_A(v_1v_2), v_2, \phi_A(v_2v_3), v_3, \dots, v_{m-1}, \phi_A(v_{m-1}v_m), v_m)$$

と表す。また、本文では必要に応じて道を構成する頂点のみを用いて、

$$P = (v_1, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{m-1}, v_{m-1}, v_m)$$

と表示することもある。

有向グラフの弧を向きを持たない辺に置き換えたグラフを基礎グラフという。

第1図のグラフ $G = (V, A)$ の頂点の集合 V と弧の集合 A は次のようになる。

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$A = \{v_2v_1, v_3v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_5, v_2v_4, v_2v_3, v_2v_2, v_2v_1\}$$

弧のラベルは

$$\phi_A(v_2v_1) = a_1, \phi_A(v_3v_2) = a_2, \phi_A(v_3v_4) = a_3,$$

$$\phi_A(v_4v_5) = a_4, \phi_A(v_1v_5) = a_5, \phi_A(v_2v_4) = a_6,$$

$$\phi_A(v_2v_3) = a_7, \phi_A(v_2v_2) = a_8, \phi_A(v_2v_1) = a_9$$

である。 v_i は頂点を識別するために便宜的につけたものであり、頂点のラベルではない。頂点のラベルの集合

$$C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

とし、 $\phi_v(v_i) = v_i$ とすると頂点のラベルが決まる。

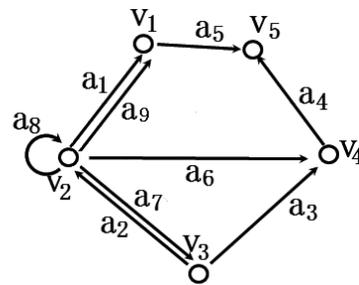
グラフ G は5つの頂点からなるので位数は5、すなわち $|V(G)| = 5$ である。

第1図の有向グラフ G の任意の頂点の間には

道が存在する。例えば、頂点 v_3 と v_5 の間には

$$P' = (v_3, a_3, v_4, a_4, v_5)$$

で表される道が存在する。頂点 v_2 と v_3 は弧 a_2 と a_7 の多重弧で接続されており、 a_2 と a_7 は互いに逆方向を向く。弧 a_1 と a_9 も多重弧であるが、方向は同じである。弧 a_8 はループである。グラフ G はその基礎グラフの任意の頂点の間に道があるので連結グラフである。



第1図 ラベル付き有向グラフの例

○は頂点を表し、矢印は弧を表す。 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 は頂点のラベル、 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ は弧のラベルである。

2-2. 構造と順序

複数の事象が存在する時、これらの事象間の関係を構造と定義する。つまり、事象間の間にどのような関係が存在するかを示したものであるが、関係には方向性があるものとする。

一方、これらの事象が発生する系列を順序と定義する。ただし、本文では事象間の発生系列の順序だけでなく、式(1)で表されるように、事象間の関係も含めたものを順序と定義する。

例えば、第1図の有向グラフでは、各事象は頂点で表されており、これらの頂点の間は弧で示される関係が成立していることで、事象 v_i 間の構造を表していることになる。また、頂点 v_3 と v_5 の間には

$$P' = (v_3, a_3, v_4, a_4, v_5)$$

で表される道が存在する。弧には方向性があり、弧の方向は頂点間の形成過程を意味しているものとする。この道は頂点 v_3 と v_5 の間の系

列を表しているので順序となる。

各頂点と頂点間を結ぶ弧の具体的な内容はそれぞれのラベルで表すことにする。

2-3. 構造の表現

構造に対して、下で定義するような $V, R^\#, \phi_V, \phi_A$ で定義されるラベル付き有向グラフ

$$G = (V, R^\#, \phi_V, \phi_A)$$

を「構造グラフ」と呼ぶ(河西、2013、河西2015)。 ϕ_V は頂点にラベルを対応させる関数、 ϕ_A は弧にラベルを対応させる関数である。

ある事象の集合を V とする。 V の元である 2 つの事象 x と y が 2 項関係にある場合、 x と y の関係を $xR^\#y$ と書く。あるいは $R^\#(x, y)$ と書く。 $xR^\#y$ は x と y の並ぶ順序が問題になるので順序対になる。 $R^\#$ は次のようになる。

$$R^\# = \{(x, y) \mid x \in V, y \in V\}$$

図 1 の事象 (頂点) v_2 と v_3 は互いに方向が逆である弧が引かれているので、関係として $v_2R^\#v_3 = v_3R^\#v_2$ が成立している。これは多重弧である。また、事象 (頂点) v_2 と v_1 間に同じ方向の弧が存在する。これも多重弧である。

構造グラフは次の性質を持つ (河西、2012)

- (1) 構造グラフ G の位数は 1 以上、即ち、 $|G| \geq 1$ である。位数が 1 のグラフは孤立点からなるグラフで、単一の事象を表す。
- (2) 構造グラフ G では 2 つの頂点が連結している場合は必ず片方向連結である。弧の方向は何らかの基準に従って決められる。
- (3) 構造グラフ G における頂点の出次数は、その頂点に対応する事象と関連している事象の数を表す。頂点の入次数も同様である。
- (4) 構造グラフ G では多重弧は存在しない。弧は事象間の関係を意味しており、関係は 1 種類のみとする。

第 2 図 (a) に 4 人の家族からなる家族関係

の例を示す。家族を構成する個人は頂点で表され、個人間の関係は弧で表される。 v, w, x, y は頂点を識別するためにつけられたものである。頂点 x と y は夫婦であり、頂点 x と y は子供である。家族関係なので、弧のラベルの集合 B と頂点のラベルの集合 C は次のようになる。

$$B = \{\text{夫、妻、子、親、兄、弟、姉、妹}\}$$

$$C = \{\text{太郎、花子、市郎、次郎}\}$$

これらの頂点の間には次の関係がある。

$$xR^\#y, yR^\#x, xR^\#v, vR^\#x, xR^\#w, wR^\#x, yR^\#v, vR^\#y, yR^\#w, wR^\#y, vR^\#w, wR^\#v$$

関係 $R^\#$ は家族関係を表し、 $xR^\#y$ は x と y は家族関係にあることを意味している。記号 $R^\#$ は一般化した記号なので、具体的な意味を表す *family* という関係記号を用いて $x \text{ family } y$ あるいは $\text{family}(x, y)$ と書く。

頂点のラベルは

$$\phi_V(x) = \text{太郎}, \phi_V(y) = \text{花子},$$

$$\phi_V(w) = \text{市郎}, \phi_V(v) = \text{次郎}$$

とする。弧のラベルは次のようになる。

$$\phi_A(x, y) = \text{夫}, \phi_A(y, x) = \text{妻}, \phi_A(x, v) = \text{子},$$

$$\phi_A(v, x) = \text{親}, \phi_A(x, w) = \text{子}, \phi_A(w, x) = \text{親},$$

$$\phi_A(y, w) = \text{子}, \phi_A(w, y) = \text{親}, \phi_A(v, w) = \text{兄},$$

$$\phi_A(w, v) = \text{弟}$$

頂点のラベルを使用すると

$$\phi_A(\text{太郎}, \text{花子}) = \text{夫}$$

のように表現できる。弧のラベルは具体的な家族関係を表す。

これは家族関係に属するすべての関係を表示したものである。これらの関係には意味的に重複しているものがある。 v と w が兄弟である場合、弧のラベルは $\phi_A(v, w) = \text{兄}$ 、 $\phi_A(w, v) = \text{弟}$ となる。この場合どちらか 1 つの関係を示しておけば関係の情報として十分である。つまり、多重弧を 1 つにまとめることになる。

家族関係を示すために次の基準を設定する。

◎矢印は年下の者から年上の者に向く。但し、第2図の例では妻は夫より年齢が下であるとする。

この基準では、 x が y より年齢が若いという関係を $xR^{\#}y$ で表すことができる。あるいは具体的な意味を表す関係 $younger$ を使用して、 x $younger$ y あるいは $younger(x, y)$ と表現できる。この場合多重弧にはならない。

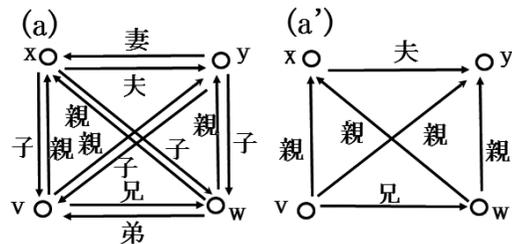
第2図(a')はこの基準による家族間の関係、即ち家族の構造を示したものである。この場合

$$xR^{\#}y, vR^{\#}x, vR^{\#}y, vR^{\#}y, wR^{\#}x, wR^{\#}y, vR^{\#}w$$

である。弧のラベルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_A(x, y) &= \text{夫} \\ \phi_A(v, x) &= \text{親} \\ \phi_A(v, y) &= \text{親} \\ \phi_A(w, x) &= \text{親} \\ \phi_A(w, y) &= \text{親} \\ \phi_A(v, w) &= \text{兄} \\ B &= \{\text{夫、親、兄}\} \end{aligned}$$

となる。



第2図 家族関係の構造グラフ

(a) は家族間の関係をすべて記入した図である。(a') は意味的に重複した関係を削除した図である。弧は多重弧にはならない。この向きは年齢が小さいものから大きいものに向く。

第3図は周遊路の例である。各地点がどのように道で結ばれているかを示すグラフである。この例では一方向とする。図で頂点は地点であり、弧は移動方向を示す。入り口から入り、指

定された経路を通して出口に向かう周遊路である。図(a)の例は入り口と出口が同じ例であり、図(b)は入り口と出口が異なる例である。出口は地点 z である。図(c)は入り口で道が2つに分かれる例である。出口は地点 y である。地点 x と y を結ぶ道は存在しない。

地点の集合を V とすると、(a)、(b)、(c)ともに

$$V = \{w, x, y, z\}$$

である。図(a)の地点間には次の関係がある。

$$wR^{\#}x, xR^{\#}y, xR^{\#}z, yR^{\#}z, zR^{\#}w$$

図(b)の地点間には次の関係がある。

$$wR^{\#}x, xR^{\#}y, xR^{\#}z, yR^{\#}z$$

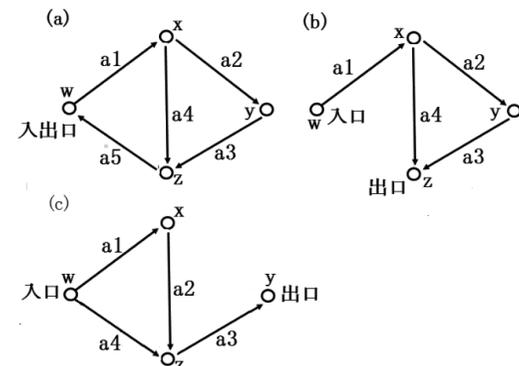
関係 $wR^{\#}x$ は、地点 w から x へ向かう一方向の通路が存在するという関係である。図(a)の弧のラベルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_A(w, x) &= a_1, \phi_A(x, y) = a_2, \phi_A(y, z) \\ &= a_3, \phi_A(x, z) = a_4, \phi_A(z, w) = a_5 \end{aligned}$$

図(b)の弧のラベルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_A(w, x) &= a_1, \phi_A(x, y) = a_2, \phi_A(y, z) \\ &= a_3, \phi_A(x, z) = a_4 \end{aligned}$$

図(a)は頂点 w から出発しに再び w に戻るの閉路である。図(b)は閉路ではない。(a)、(b)ともに地点 w と y を結ぶ弧が存在しないので、 w



第3図 周遊路の構造グラフ

(a) は入り口と出口が同じ地点の例、(b) は入り口と出口が異なる地点の例である。(c) は入り口で道が2つに分かれる例である。

から y へ直接行く道が存在しない。

図 (c) の地点間には次の関係がある。

$$wR^{\#}x, wR^{\#}z, xR^{\#}z, zR^{\#}y$$

図 (c) の弧のラベルは次のようになる。

$$\phi_A(w, x) = a_1, \phi_A(x, z) = a_2, \phi_A(z, y) = a_3, \phi_A(w, z) = a_4$$

第4図は河川の流路の例である。頂点は河川上の地点を意味する。頂点のラベル u と v は河川の源流、 w は合流点、 x は分岐点、 y と z は河口であるとする。弧は流路を示し、上流から下流の方向に向く。地点の集合は

$$V = \{u, v, w, x, y, z\}$$

である。これらの頂点の間には次の関係がある。

$$uR^{\#}w, vR^{\#}w, wR^{\#}x, xR^{\#}y, xR^{\#}z$$

$uR^{\#}w$ は地点 u が w の上流に位置することを意味する。弧のラベルは

$$\phi_A(u, w) = a_1, \phi_A(v, w) = a_2, \phi_A(w, x) = a_3, \phi_A(x, y) = a_4, \phi_A(x, z) = a_5$$

である。

第4図のグラフを登山道を表すことと考えることもできる。この場合、地点 u と v は登山道入り口で、地点 y と z は嶺とする。登山道は地点 w で合流し、地点 x でそれぞれに向かう道に分岐する。グラフ中の弧のラベルは地点間の登山道の名前とする。

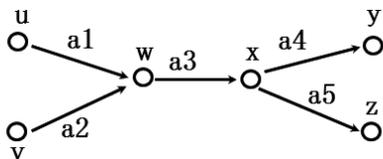
地点の集合は

$$V = \{u, v, w, x, y, z\}$$

である。これらの頂点の間には次の関係がある。

$$uR^{\#}w, vR^{\#}w, wR^{\#}x, xR^{\#}y, xR^{\#}z$$

$uR^{\#}w$ は、地点 w は u より高所に存在することを意



第4図 河川の流路の例

頂点は地点を表す。弧の方向は上流側から下流側に向く。

味する。弧のラベルは

$$\phi_A(u, w) = a_1, \phi_A(v, w) = a_2, \phi_A(w, x) = a_3, \phi_A(x, y) = a_4, \phi_A(x, z) = a_5$$

である。

地質学の場合、露頭で観察結果の記述に使用できる。露頭観察では、複数の地質体が存在する場合、各々の地質体がどのように接触しているかが問題になる。1つの露頭で識別された地質体の集合を V とする。 V の元である2つの地質体 x と y が互いに接触している場合、 x と y の関係は $xR^{\#}y$ と書く。

$$R^+ = \{(x, y) \mid xRy \vee xIy \vee xFy, x \in V, y \in V\}$$

$$R^{\#} \Leftrightarrow R^+ \vee xLy \vee xDy$$

xR^+y が成り立つ順序対 (x, y) の集合は次のようになる (河西, 2012)。

$$R^+ = \{(x, y) \mid xRy \vee xIy \vee xFy, x \in V, y \in V\}$$

$xR^{\#}y$ が成り立つ順序対 (x, y) の集合は次のようになる。

$$R^{\#} = \{(x, y) \mid xR^+y \vee xLy \vee xDy, x \in V, y \in V\}$$

xRy は空間的な上下関係であり、 x が空間的に下側にある。 xIy は深成岩あるいは岩脈 y が地質体 x に貫入している関係である。 xFy は断層破碎帯 y が地質体 x を切断している関係である。 $xR^{\#}y$ は空間的な上下関係 xRy 、貫入関係 xIy 、断層関係 xFy 、包含関係 xLy 、同時異相 xDy を統一的に表現したものである。断層は面ではなく、断層破碎帯の形成としてとらえる。

構造グラフは前述のように

$$G = (V, R^{\#}, \phi_V, \phi_A)$$

である。 V は露頭を構成する地質体の集合である。 ϕ_V は V の元である各地質体に地層名を対応付ける写像である。 ϕ_A は順序対 (x, y) に接触関係の名称の集合

$B = \{\text{整合, 不整合, 貫入, 断層, 包含, 同時異相}\}$ の1つの元を対応付ける写像 $\phi_A: R^{\#} \rightarrow B$ である。構造グラフは露頭の構造を表すラベル付き有向グラフであり、頂点と弧はそれぞれ地質体

と地質体間の接触関係を表している。

第5図は露頭で観察される地質体の接触関係の例である。この図は露頭構造を表しており、各構造に対応している構造グラフを図の下に示してある。

第5図 (a) は互いに整合関係にある地質体 x と y を地質体 z が不整合に覆う例である。地質体の集合は

$$V = \{x, y, z\}$$

である。地質体の接触関係は

$$xR^{\#}y (=xRy)$$

$$xR^{\#}z (=xRz)$$

$$yR^{\#}z (=yRz)$$

であり、弧のラベルは $\phi_A(x, y) = \text{整合}$ 、 $\phi_A(x, z) = \text{不整合}$ 、 $\phi_A(y, z) = \text{不整合}$ である。対応する構造グラフを (a') に示す。弧の向きは空間的に下の方にある地質体から上の方にある地質体に向く。

第5図 (b) と (c) は互いに整合関係にある地質体 x と y に地質体 z が貫入する例である。(b) は岩脈の貫入の例、(c) は深成岩の貫入の例である。(c) の網の部分には深成岩の貫入による接触変性の領域を示している。地質体の集合は (b) と (c) とともに

$$V = \{x, y, z\}$$

である。地質体の接触関係は両方とも

$$xR^{\#}y (=xRy)$$

$$xR^{\#}z (=xIz)$$

$$yR^{\#}z (=yIz)$$

である。弧のラベルは

$$\phi_A(x, y) = \text{整合}$$

$$\phi_A(x, z) = \text{貫入}$$

$$\phi_A(y, z) = \text{貫入}$$

である。対応する構造グラフを (b') と (c') に示す。貫入の場合、弧の方向は貫入される地質体から貫入する地質体に向く。

第5図 (d) は互いに整合関係にある地質体 x と y を断層 f が切り、さらに地質体 z がこれら不

整合に覆う例である。断層 f は面ではなく、断層破砕帯、すなわち1つの地質体としてとらえている。地質体の集合は

$$V = \{x, y, z, f\}$$

である。

地質体の接触関係は

$$xR^{\#}y (=xRy)$$

$$xR^{\#}f (=xFf)$$

$$yR^{\#}f (=yFf)$$

$$yR^{\#}z (=yRz)$$

$$fR^{\#}z (=fRz)$$

である。弧のラベルは

$$\phi_A(x, y) = \text{整合}$$

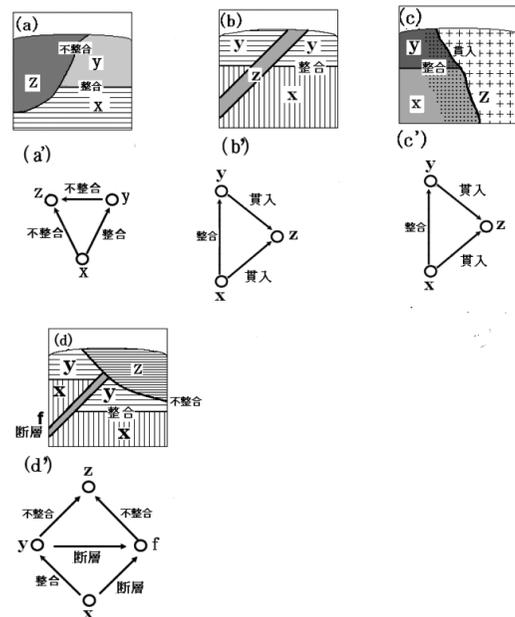
$$\phi_A(x, f) = \text{断層}$$

$$\phi_A(y, f) = \text{断層}$$

$$\phi_A(y, z) = \text{不整合}$$

$$\phi_A(f, z) = \text{不整合}$$

である。対応する構造グラフを (d') に示す。断層の場合、弧は切られる地質体から切る地質



第5図 露頭で観察される構造の例

各露頭断面の下に対応する構造グラフを示す。

体の方向に向く。

2-4. 順序の表現

構造グラフは事象間の関係、即ち構造を二項関係を使用して図示したものであるので、このままでは事象間の形成順序とは直接結びつかない。

事象の集合を V とする。事象 x と y にある関係があり、 x の形成順序が y よりも前にある場合、

$$xUy$$

と書く。関係 U の集合は次のようになる。

$$U = \{(x, y) \mid xUy, x \in V, y \in V\}$$

U は反対称的な関係であるとする。即ち、 $x \neq y$ ならば xUy と yUx は同時に成立しないとする。関係 U の推移的閉包に反射的性質を追加したものを U^* とする (河西、2012)。この U^* は

反射律：すべての $x \in V$ に対して、 xU^*x

反対称律：すべての $x, y \in V$ に対して

$$xU^*y \wedge yU^*x \Rightarrow x=y$$

推移律：すべての $x, y, z \in V$ に対して

$$xU^*y \wedge yU^*z \Rightarrow xU^*z$$

を満たすので、 V 上の半順序である。したがって V の元 v_i ($1 \leq i \leq n$) を

$$v_iU^*v_j \Leftrightarrow i \leq j$$

となるように、 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ のように番号をつけることができる。 U^* が全順序になる場合に限り、 $i \leq j$ であれば $v_iU^*v_j$ であるといえる。この場合 ($v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$) は事象の形成順序をあらわしている。

何らかの関係がある事象 x と y が存在し、ある基準に従って形成順序を決めるとすると、この2つ事象の形成順序は

$$xR^{\#}y \Rightarrow xU^*y$$

となる。

この形成順序を表現するラベル付き有効グラフを順序グラフといい、以下のように定義される (河西 2012、2013)。

$$S = (V, U^*, \phi_v, \phi_A)$$

V は事象の集合、 ϕ_v は頂点にラベルを対応させる関数、 ϕ_A は弧にラベルを対応する関数である。

第2図 (b) で示した家族関係の場合、推移律から

$$vU^*w \wedge wU^*x \Rightarrow vU^*x$$

となり、順序 (v, w, x) が求まる。

複数の事象 v_i が存在しこの事象の集合を V とする。これらが半順序関係にある場合、すべての事象 $v_i \in V$ について $v_i \leq a$ となる V の元が存在する場合 a を最大元という。逆に、 $v_i \geq b$ となるような元が存在する場合 b を最小元という。

ある事象 $v_i \in V$ について $v_i \leq a$ となる V の元が存在すれば $v_i = a$ となる場合 a を極大元という。逆に、 $v_i \geq b$ となるような元が存在する場合 $v_i = b$ となる場合 a を極小元という。極大元と極小元は複数存在することがある。極大元が1つしか存在しない場合は最大元と同じであり、極小元が1つしか存在しない場合は最小元と同じになる。

順序グラフ S の性質は次のようになる (河西、2012)。

- (1) 順序グラフ S は事象間の形成順序を表したラベル付き有効グラフであり、頂点は事象を表し、弧は事象間の形成順序を表している。
- (2) 2つの事象以上からなる順序グラフ S の位数は2以上、すなわち $|S| \geq 2$ である。
- (3) 順序グラフ S では、2点が連結している場合は必ず片方向連結であり、その弧は形成順序が古い事象から新しい事象の方に向く。
- (4) 順序グラフ S に最大元と最小元が存在する場合、入次数が1の頂点が最も形成順序が古い事象であり、出次数が1の頂点が形成順序が最も新しい事象である。頂点には反射律を意味するループが存在するので、入次数と出次数の両方とも1

- 以上になる。
- (5) 順序グラフ S では多重弧が存在しない。
2つの事象間の関係は1種類とする。
 - (6) 順序グラフに最大元と最小元が存在する場合、最小元から最大元まですべての頂点を1回ずつ通る道が存在すれば、この道は形成順序を表す。

第6図に家族関係の順序グラフを示す。家族関係は第2図と同じものである。図中のループは反射的性質を表す。

関係は $xR^{\#}y$ 、 $vR^{\#}x$ 、 $vR^{\#}y$ 、 $vR^{\#}y$ 、 $wR^{\#}x$ 、 $wR^{\#}y$ 、 $vR^{\#}w$ である。 $xR^{\#}y$ は x は y より年齢が若いという関係である。弧のラベルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_A(x, y) &= \text{夫}, \phi_A(v, x) = \text{親}, \phi_A(v, y) \\ &= \text{親}, \phi_A(w, x) = \text{親}, \phi_A(w, y) = \text{親}, \phi_A \\ (v, w) &= \text{兄} \end{aligned}$$

形成順序は

$$\begin{aligned} xR^{\#}y \Rightarrow xU^*y, vR^{\#}x \Rightarrow vU^*x, vR^{\#}y \Rightarrow vU^*y, \\ vR^{\#}y \Rightarrow vU^*y, wR^{\#}x \Rightarrow wU^*x, wR^{\#}y \Rightarrow wU^*y, \\ vR^{\#}w \Rightarrow vU^*w \end{aligned}$$

となる。弧のラベルは構造図と同様に次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_A(x, y) &= \text{夫}, \phi_A(v, x) = \text{親}, \phi_A(v, y) \\ &= \text{親}, \phi_A(w, x) = \text{親}, \phi_A(w, y) = \text{親}, \phi_A \\ (v, w) &= \text{兄} \end{aligned}$$

入次数が1であるのは頂点 v であり、出次数が1なのは頂点 y である。したがって、最小元は v であり、最大元は y である。

推移律から

$$\begin{aligned} vU^*w \wedge wU^*x \Rightarrow vU^*x \\ vU^*x \wedge xU^*y \Rightarrow vU^*y \end{aligned}$$

が求まり、形成順序として

$$P = (v, w, x, y)$$

が求まる。 P は最小元 v からすべての頂点を通って最大元 y まで達する道を表している。これは年齢順序を表している。

これに事象間の関係を書き入れると

$$P' = (v, \phi_A(v, w), w, \phi_A(w, x), x, \phi_A(x, y), y)$$

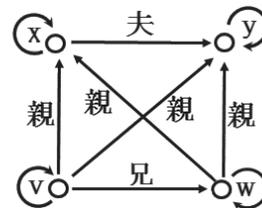
となり、事象間の関係の名称を書き入れると

$$P' = (v, \text{兄}, w, \text{親}, x, \text{夫}, y)$$

となる。さらに、頂点の名称を使用すると

$$P' = (\text{次郎}, \text{兄}, \text{市郎}, \text{親}, \text{花子}, \text{夫}, \text{太郎})$$

となる。これは年齢順序と続柄の両方を表している。



第6図 家族関係の順序グラフ

頂点は個人を表し、弧は個人間の家族関係を表している。年齢順をあらわす関係を使用すると全順序となる。ループは反射律を表す。最小元は v 、最大元は y であり、すべての頂点を1度通る v から y までの道が存在する。

第7図は第3図と同じ周遊路の例である。頂点は地点であり、弧は一方向の進行方向を示す。この例では一方向とする。図(a)の例は入り口と出口が同じ例であり、図(b)は入り口と出口が異なる例である。

地点の集合を V とすると

$$V = \{w, x, y, z\}$$

である。図(a)の地点間には次の関係がある。

$$wR^{\#}x, xR^{\#}y, xR^{\#}z, yR^{\#}z, zR^{\#}w$$

図(b)の地点間には次の関係がある。

$$wR^{\#}x, xR^{\#}y, xR^{\#}z, yR^{\#}z$$

関係 $wR^{\#}x$ は、 w から x に進行するという関係である。弧のラベルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_A(w, x) &= a_1, \phi_A(x, y) = a_2, \phi_A(y, z) \\ &= a_3, \phi_A(x, z) = a_4, \phi_A(z, w) = a_5 \end{aligned}$$

図(a)の場合、経路は

$$\begin{aligned} wR^{\#}x \Rightarrow wU^*x, xR^{\#}y \Rightarrow xU^*y, xR^{\#}z \Rightarrow xU^*z, \\ yR^{\#}z \Rightarrow yU^*z, zR^{\#}w \Rightarrow zU^*w \end{aligned}$$

である。推移律から、

$$\begin{aligned} wU^*x \wedge xU^*y &\Rightarrow wU^*y \\ wU^*y \wedge yU^*z &\Rightarrow wU^*z \\ wU^*z \wedge zU^*w &\Rightarrow wU^*w \end{aligned}$$

となる。これから

$$P = (w, x, y, z, w)$$

が求まる。道 P は始点と終点が一致する。このため、図 (a) は閉路となる。閉路には最大元と最小元が存在しないので順序関係にない。

また、次の推移的閉包から

$$wU^*x \wedge xU^*y \Rightarrow wU^*y$$

から地点 w と y の関係が推論できる。この w と y を結ぶ弧 wy は推移的閉包から推定により得られたものなので、実際に関係がある弧と区別するために破線で描くことにする。弧のラベルは“推論”とする。 wU^*y は地点 y は地点 w の進行先に存在することを意味する。

入口と出口は物理的に同じ場所にあってもよい。例えば、入出口を柵で2つに分け、片方を入口とし、片方を出口としてもよい。この場合図 (b) のようになる。

図 (b) の場合、経路は

$$\begin{aligned} wR^{\#}x \Rightarrow wU^*x, \quad xR^{\#}y \Rightarrow xU^*y, \\ xR^{\#}z \Rightarrow xU^*z, \quad yR^{\#}z \Rightarrow yU^*z \end{aligned}$$

である。推移律から、

$$\begin{aligned} wU^*x \wedge xU^*y &\Rightarrow wU^*y \\ wU^*y \wedge yU^*z &\Rightarrow wU^*z \end{aligned}$$

が成立する。入口 w から出口 y までの頂点を1度通る道

$$P = (w, x, y, z)$$

が存在し、これらは比較可能なので全順序になる。弧のラベルを記入すると次のようになる。

$$P' = (w, a_1, x, a_2, y, a_3, z)$$

入り口から出口までの経路が求まる。これはすべての頂点を一度ずつ通るので道となる。地点 w の入次数は1、地点 z の出次数は1なので、最大元は z 、最小元は w である。

また、次の推移的閉包から

$$wU^*x \wedge xU^*y \Rightarrow wU^*y$$

から地点 w と y の順序関係が推論できる。これは、地点 y は地点 x の進行先にあることを意味する。さらに、

$$wU^*x \wedge xU^*z \Rightarrow wU^*z$$

から地点 w と z の順序関係も推論できる

この w と y を結ぶ弧 wy と w と z を結ぶ弧 wz は推移的閉包から推定により得られたものなので、破線で描くことにする。弧のラベルは“推論”とする。

図 (c) は入り口 w から地点 z まで2つの経路が存在する例である。地点 z から出口 y までの経路は1つである。経路は

$$\begin{aligned} wR^{\#}x \Rightarrow wU^*x, \quad wR^{\#}z \Rightarrow wU^*z, \\ xR^{\#}z \Rightarrow xU^*z, \quad zR^{\#}x \Rightarrow zU^*x \end{aligned}$$

である。推移律から、

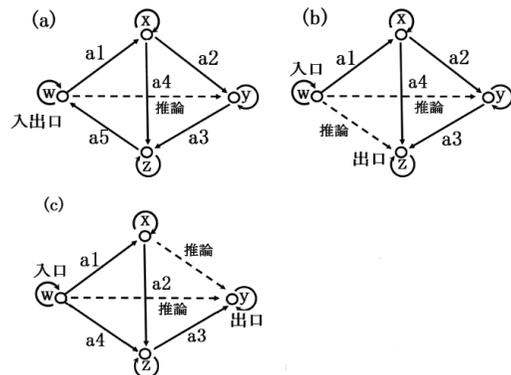
$$\begin{aligned} wU^*x \wedge xU^*z &\Rightarrow wU^*z \\ wU^*z \wedge zU^*y &\Rightarrow wU^*y \end{aligned}$$

が成立する。これは入り口 w から出口 y までの道が存在することを意味している。また、

$$wU^*z \wedge zU^*y \Rightarrow wU^*y$$

が成立する。これも入り口 w から出口 y までの道が存在することを意味している。このため、

$$P_1' = (w, a_1, x, a_2, z, a_3, y)$$



第7図 周遊路の順序グラフ

(a) の図は閉路であり、(b) と (c) は閉路ではない。図中の破線で描かれている弧は推移的閉包で得られた関係を示す。

$P_2' = (w, a_4, z, a_3, y)$
 の2つの道が存在する。

第8図は河川の流路の例である。頂点は河川上の地点を意味する。頂点のラベル u と v は河川の源流、 w は合流点、 x は分岐点、 y と z は河口であるとする。弧は流路を示し、上流から下流の方向に向く。地点の集合は

$$V = \{u, v, w, x, y, z\}$$

である。これらの頂点の間には次の関係がある。

$$uR^{\#}w, vR^{\#}w, wR^{\#}x, xR^{\#}y, xR^{\#}z$$

$uR^{\#}w$ は地点 u が w の上流に位置することを意味する。弧のラベルは

$$\begin{aligned} \phi_A(u, w) &= a_1, \phi_A(v, w) = a_2, \phi_A(w, x) \\ &= a_3, \phi_A(x, y) = a_4, \phi_A(x, z) = a_5 \end{aligned}$$

である。

地点間の流路関係は、

$$\begin{aligned} uR^{\#}w \Rightarrow uU^*w, vR^{\#}w \Rightarrow vU^*w, wR^{\#}x \Rightarrow wU^*x, \\ xR^{\#}y \Rightarrow xU^*y, xR^{\#}z \Rightarrow xU^*z \end{aligned}$$

である。

推移律から、

$$\begin{aligned} uU^*w \wedge wU^*x \Rightarrow uU^*x \\ uU^*x \wedge xU^*y \Rightarrow uU^*y \end{aligned}$$

から、 u から y までの経路が

$$P' = (u, a_1, w, a_3, x, a_4, y)$$

と求まる。しかし、

$$\begin{aligned} vU^*w \wedge wU^*x \Rightarrow vU^*x \\ vU^*x \wedge xU^*z \Rightarrow vU^*z \end{aligned}$$

から、 v から z までの経路が

$$P' = (v, a_2, w, a_3, x, a_5, z)$$

と別の経路も求まる。

結局、

$$\begin{aligned} P_1' &= (u, a_1, w, a_3, x, a_4, y) \\ P_2' &= (v, a_2, w, a_3, x, a_5, z) \\ P_3' &= (u, a_1, w, a_3, x, a_5, z) \\ P_4' &= (v, a_2, w, a_3, x, a_4, y) \end{aligned}$$

の4つの経路が求まる。

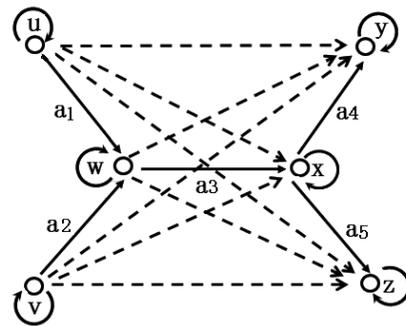
第8図には極大元 (u と v) と極小元 (y と z) が存在するが、最大元と最小元は存在しない。

u と v は比較不可能であり、 y と z も比較不可能である。このため、 v, w, x, y は半順序ではあるが全順序にはならない。このため複数の道 P_1', P_2', P_3', P_4' が存在する。

また、次の推移閉包により

$$uU^*w \wedge wU^*x \Rightarrow uU^*x$$

地点 u と x の関係がもとまる。この関係は推移閉包により求めたもので、直接の関係と区別するために弧を破線で示し、弧のラベルを“推論”とする。この関係は地点 x は地点 u の下流にあるという関係になる。同様に、推移閉包により破線で示す弧が求まる。



第8図 流路の順序グラフ

頂点は位置を表し、弧は流路を表す。弧の方向は上流から下流に向く。破線の弧は推移的閉包により求められた関係である。

地質学の露頭の観察結果から、露頭を構成する地質体の形成順序を順序グラフから確定できる。地質学では地質体の形成順序を層序という。本文では地質体の形成順序と地質体間の接触関係が確定できたものを層序とする（河西、2012）。このため、地質学では順序グラフを特に層序グラフと呼ぶ（河西、2012）。

露頭における地質体の空間配置や接触関係の観察結果に地層累重の法則や交差切りの法則、包含関係、同時異相関係を当てはめて地質体の新旧関係に変換した結果が層序グラフである。

第9図に露頭の断面の例を示す。第9図は第5図の露頭断面と同じものである。第9図

(a) の場合地質体の接触関係は

$$\begin{aligned} xR^{\#}y (=xRy), \\ xR^{\#}z (=xRz), \\ yR^{\#}z (=yRz) \end{aligned}$$

であり、弧のラベルは $\phi_A(x, y) = \text{整合}$ 、 $\phi_A(x, z) = \text{不整合}$ 、 $\phi_A(y, z) = \text{不整合}$ である。地質体の新旧関係は地層壘重の法則から次のようになる。

$$\begin{aligned} xR^{\#}y \Rightarrow xU^*y \\ xR^{\#}z \Rightarrow xU^*z \\ yR^{\#}z \Rightarrow yU^*z \end{aligned}$$

推移律から、

$$xU^*y \wedge yU^*z \Rightarrow xU^*z$$

がもとまる。地質体の形成順序は全順序であり、

$$P = (x, y, z)$$

である。これに、地質体間の接触関係を書き込むと、層序が次のように求まる。

$$P' = (x, \text{整合}, y, \text{不整合}, z)$$

対応する層序グラフを (a') に示す。弧の向きは形成順序が古い地質体から新しい地質体の方にある地質体に向く。

地質体 x, y, z に具体的な名称を対応させる。例えば、

$$\phi_V(x) = \text{砂岩}, \phi_V(y) = \text{凝灰岩}, \phi_V(z) = \text{泥岩}$$

とすると、層序は

$$P' = (\text{砂岩}, \text{整合}, \text{凝灰岩}, \text{不整合}, \text{泥岩})$$

第9図 (b) と (c) の地質体の接触関係は両方とも $xR^{\#}y (=xRy)$ 、 $xR^{\#}z (=xRz)$ 、 $yR^{\#}z (=yRz)$ である。弧のラベルは $\phi_A(x, y) = \text{整合}$ 、 $\phi_A(x, z) = \text{貫入}$ 、 $\phi_A(y, z) = \text{貫入}$ である。地質体の新旧関係は地層壘重の法則と交叉切りの法則から次のようになる。

$$\begin{aligned} xR^{\#}y \Rightarrow xU^*y \\ xR^{\#}z \Rightarrow xU^*z \\ yR^{\#}z \Rightarrow yU^*z \end{aligned}$$

推移律から

$$xU^*y \wedge yU^*z \Rightarrow xU^*z$$

がもとまり、地質体の形成順序は全順序であり

$$P = (x, y, z)$$

である。これに、地質体間の接触関係を書き込むと、層序が次のように求まる。

$$P' = (x, \text{整合}, y, \text{貫入}, z)$$

対応する層序グラフを (b') と (c') に示す。貫入の場合、弧の方向は貫入される地質体から貫入する地質体に向く。ただし、貫入している地質体の名称は露頭断面 (b) と (c) では異なる。断面 (b) の場合

$$\phi_V(x) = \text{砂岩}, \phi_V(y) = \text{凝灰岩}, \phi_V(z) = \text{岩脈}$$

とし、断面 (c) では

$$\phi_V(x) = \text{砂岩}, \phi_V(y) = \text{凝灰岩}, \phi_V(z) = \text{深成岩}$$

とする。

層序はそれぞれ

$$P_b' = (\text{砂岩}, \text{整合}, \text{凝灰岩}, \text{貫入}, \text{岩脈})$$

$$P_c' = (\text{砂岩}, \text{整合}, \text{凝灰岩}, \text{貫入}, \text{深成岩})$$

となる。

第9図 (d) の地質体の接触関係は

$$\begin{aligned} xR^{\#}y (=xRy), xR^{\#}f (=xFf), yR^{\#}f (=yFf) \\ yR^{\#}z (=yRz), fR^{\#}z (=fRz), \end{aligned}$$

である。弧のラベルは

$$\begin{aligned} \phi_A(x, y) = \text{整合}, \\ \phi_A(x, f) = \text{断層}, \\ \phi_A(y, f) = \text{断層}, \\ \phi_A(y, z) = \text{不整合}, \\ \phi_A(f, z) = \text{不整合} \end{aligned}$$

である。

新旧関係は

$$\begin{aligned} xR^{\#}y \Rightarrow xU^*y \\ xR^{\#}f \Rightarrow xU^*f \\ yR^{\#}f \Rightarrow yU^*f \\ yR^{\#}z \Rightarrow yU^*z \\ fR^{\#}z \Rightarrow fU^*z \end{aligned}$$

であり、推移律から次のようになる。

$$xU^*y \wedge yU^*f \Rightarrow xU^*f$$

$$xU^*f \wedge fU^*z \Rightarrow xU^*z$$

がもとまり、全順序となる。地質体の形成順序は

$$P = (x, y, f, z)$$

である。これに、地質体間の接触関係を書き込むと、層序が次のように求まる。

$$P' = (x, \text{整合}, y, \text{断層}, f, \text{不整合}, z)$$

対応する層序グラフを (d') に示す。断層の場合、弧は切られる地質体から切る地質体の方向に向く。図中の頂点 x と z を結ぶ弧は破線で描かれている。地質体 x と z は直接接触していないが、推移律から求められた関係である。地質学の露頭観察では地質体が接触しているかどうかとも問題になる。このため、推移律から求められた関係を区別して破線で描かれる。この破線で

描かれた弧のラベルは“推論”とする。

第9図 (e) は地質体 x と y を地質体 z が不整合に覆う例である。地質体 x と y の関係は不明である。

地質体の集合 V は

$$V = \{x, y, z\}$$

であり、地質体の接触関係は

$$xR^{\#}z, yR^{\#}z$$

である。弧のラベルは

$$\phi_A(x, z) = \text{不整合},$$

$$\phi_A(y, z) = \text{不整合}$$

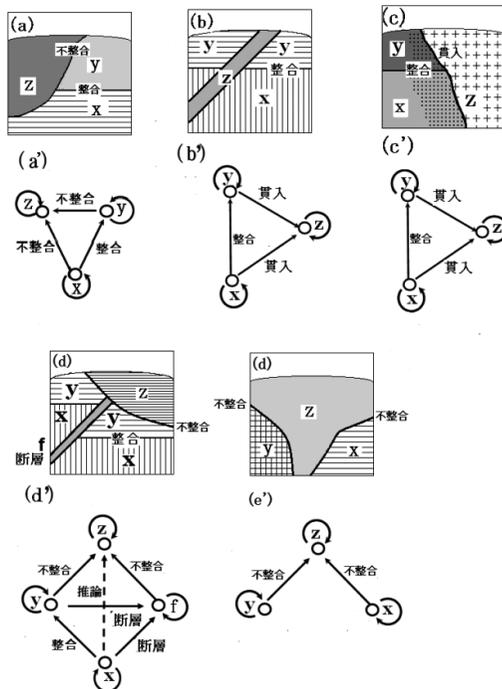
である。新旧関係は

$$xR^{\#}z \Rightarrow xU^*z, yR^{\#}z \Rightarrow yU^*z$$

である。層序グラフを (e') に示す。地質体 x と y の形成 (堆積) 順序が不明なので半順序ではあるが全順序にはならない。このため、次の2つの道が存在する。

$$P_1' = (x, \text{不整合}, z)$$

$$P_2' = (y, \text{不整合}, z)$$



第9図 露頭断面と層序グラフ

対応する層序グラフを各露頭断面の下に示してある。

2-5. ハッセ図との関係

ハッセ図は次のように定義された図であり、順序集合を図示する方法の1つである。

($A : \leq$) を半順序集合とする。 $A \in a, b$ について、 $a \leq b$ かつ $a \neq b$ であることを $a < b$ と書く。 $a < b$ であり、かつ $a < c < b$ となるような c が存在しないとき b は a を覆うという。これを $a \ll b$ と書く。このような関係にある順序対 (a, b) の集合

$$C_v = \{(a, b) \mid a, b \in A \text{ かつ } b \text{ は } a \text{ を覆う}\}$$

を被覆集合という。すべての $(a, b) \in C_v$ に対して、 b を上に、 a が下になるように配置したグラフをハッセ図という (河西, 2012)。

つまり、点 b を点 a の上方に描き、 $a \ll b$ の関係にある A の点どうしをすべて線で結んだ図を ($A : \leq$) のハッセ図という。

ハッセ図は頂点の上下位置により関係の方向が示されているので、弧ではなく辺で示され

る。ハッセ図は順序関係を示すのに適した図である。

順序グラフから推移的閉包により求められた弧を除き、推移律から求められる弧と同一の弧が存在する場合この弧を取り除く。さらにループを取り除く。 $xR^{\#}y$ の関係にある場合、頂点 x を上側に、頂点 y を下側になるように移動する。これらの操作を行った図はハッセ図と同じ図になる。

第10図(b)は図(a)のハッセ図の例である。弧 (vx) は推移律

$$vR^{\#}w \wedge wR^{\#}x \Rightarrow vR^{\#}x$$

から求まるので取り除かれる。同様に、弧 (wy) も推移律

$$wR^{\#}x \wedge xR^{\#}y \Rightarrow wR^{\#}y$$

から求まるので取り除かれる。ハッセ図には通常辺のラベルは表示されない。しかし、頂点間の関係を表示したほうが便利ことがある。このラベルをつけたハッセ図をラベル付きハッセ図という(河西, 2012)。

ハッセ図は順序関係が上下の位置で示される。このためハッセ図は上下方向の図となる。順序グラフでは順序関係は弧の方向で示される。このため、順序グラフは横方向に描いてもよい。

ハッセ図は順序関係を図示するに適した図であるが、頂点間の情報がかけてしまう場合もある。第10図(c)は第7図(b)に示した周遊路の順序グラフである。対応するラベル付きハッセ図を(d)に示す。図(c)には頂点 x と y 結ぶ弧が存在するが、(d)のハッセ図にはこの弧は現れない。 $xR^{\#}y$ から $x \ll y$ となり、 x と y の間には辺が引かれる。頂点 x と z の関係は

$$xR^{\#}y \wedge yR^{\#}z \Rightarrow xR^{\#}z$$

となり

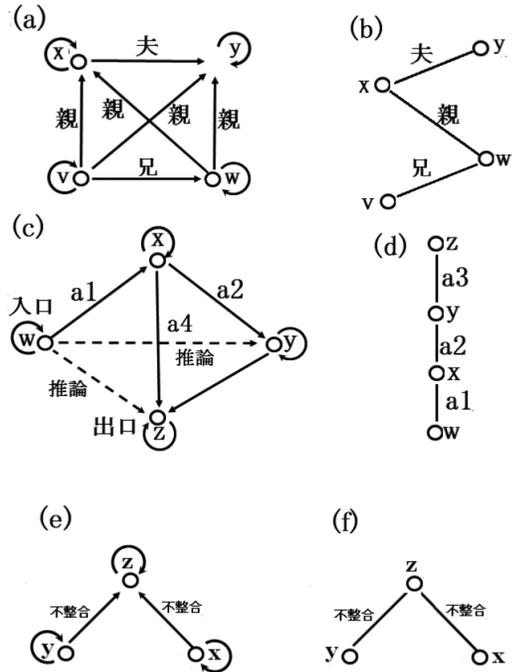
$$x > y > z$$

から、 $x \gg z$ ではない。このため、 x と z の間に辺が引かれない。これは地点 x から地点 y への道が

存在するという情報が欠落することを意味している。このように、ハッセ図では表示する内容によっては情報が欠落することもある。

図(e)のハッセ図が(f)である。(f)は分岐があるハッセ図であり、極小元は存在するが最小元は存在しない。

事象が全順序である場合はハッセ図は分岐の無い図になり、半順序の場合は分岐のある図になる。第10図(b)と(c)は最小元から最大元まで分岐の無い図になっているので全順序である。(f)は分岐があるので半順序である。



第10図 ハッセ図

ハッセ図は頂点の位置と辺で順序関係が示される。図(a)のハッセ図を(b)に、(c)のハッセ図を(d)に、(e)のハッセ図を(f)に示す。

3. 順序グラフの改善

複数の事象をある基準に従ってグループにまとめ、グループ間の関係と形成順序を表示することができる。

複数の事象が存在し、これの事象の集合を V とする。これらの事象をある基準に従って複数のグループに類別できるとする。 $x \in V$ と $y \in V$ は同じグループに属するという関係を xEy と書く。 E は対称的な関係である。 E の反射的かつ推移的閉包を E^* としたとき、 E^* は

反射律：すべての $x \in V$ について、 $x E^* x$

対称律：すべての $x, y \in V$ について、

$$x E^* y \Rightarrow y E^* x$$

推移律：すべての $x, y, z \in V$ について、

$$x E^* y \wedge y E^* z \Rightarrow x E^* z$$

を満たす V 上の同値関係である。

事象の集合 V を関係 E^* により類別できる。このとき、同値類 $[x]$ と同値類の集合すなわち商集合 V/E^* は次のようになる。

$$[x] = \{v \mid v E^* x, v \in V\}$$

$$V/E^* = \{[x] \mid x \in V\}$$

例えば、 x, y, z が同じグループに属する場合には

$$[x] = \{x, y, z\}$$

である。この場合、 x が代表元である。代表元は元のうちのどれを選んでもよい。元 y を代表元とすると

$$[y] = \{x, y, z\}$$

である。

1つの事象 x からなるグループは

$$[x] = \{x\}$$

である。

順序グラフの定義を次のように再定義される(河西 2012、2013)。

$$S = (V/E^*, U^*, \phi_v, \phi_A)$$

関係 U^* が成り立つ順序対 $([x], [y])$ の集合を

$$U^* = \{([x], [y]) \mid x U^* y, x \in V, y \in V\}$$

と書く。関係 U^* は、反射律、反対称律、推移律を満たすので、 V 上の半順序である。 U^* が全順序になる場合に限り、 $i \leq j$ であれば $[v_i] U^* [v_j]$ であるといえる。この場合、

$$P = ([v_1], [v_2], \dots, [v_n])$$

は事象の形成順序を表している。 $[v_1]$ が最も古い事象、 $[v_n]$ が最も新しい事象である。頂点を連結する弧を記入すると P は次のようになる。

$$P = ([v_1], [v_1][v_2], [v_2], [v_2][v_3], [v_3], \dots, [v_{n-1}], [v_{n-1}][v_n], [v_n])$$

P の弧 $[v_i][v_j]$ の位置に、接触関係の名称である弧 $[v_i][v_j]$ のラベル $\phi_A([v_i], [v_j])$ を代入した

$$P' = ([v_1], \phi_A([v_1], [v_2]), [v_2], \dots, [v_{n-1}], \phi_A([v_{n-1}], [v_n]), [v_n])$$

は事象の形成順序と事象間の関係を表しているので、「順序」である。

同値類 E^* を使用した新旧関係の推論規則は

$$[x] R^\# [y] \Rightarrow [x] U^* [y]$$

$$[x] U^* [y] \wedge [y] U^* [z] \Rightarrow [x] U^* [z]$$

同値類 $[y]$ の元の数 n が 1、すなわち $[y] = \{y\}$ であり、かつ $[x]$ の各元と y の関係がすべて同じ場合

$$\phi_A([x], [y]) = \phi_A(x, y)$$

となる。これ以外場合は任意に決められる。

$[x] R^\# [y]$ の関係にあり、 $[x]$ と $[y]$ のどちらかの元の数 n が 1 の場合、この順序で $[x]$ と $[y]$ の直積 $[x] \times [y]$ をとると、 $[x]$ を構成する元と $[y]$ を構成する元との関係が求まる。

$[x] = \{v_1, v_2, v_3\}$ 、 $[y] = \{v_4\}$ の場合、直積 $[x] \times [y]$ は次のようになる。

$$[x] \times [y] = \{(v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$$

$$[x] = \{v_j\}$$
、 $[y] = \{v_2, v_3, v_4\}$ の場合、

直積 $[x] \times [y]$ は次のようになる。

$$[x] \times [y] = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)\}$$

第 11 図 (a) は第 2 図 (a') と同じ家族関係の順序グラフである。 $V = \{v, w, x, y\}$ である。

これを世代ごとに類別化すると、同値類と代表元は次のようになる。

$$[x] = \{x, y\}$$

$$[v] = \{v, w\}$$

$[x]$ は親の世代、 $[v]$ は子の世代になる。代

表元はそれぞれ x, y とした。弧のラベルは、
 $\phi_A([v], [x]) = \text{親}$ である。

新旧関係は

$$[v]R^\# [x] \Rightarrow [v]U^* [x]$$

$$\phi_A([v], [x]) = \phi_A(v, x)$$

となる。 $\phi_A(v, x) = \text{親}$ かつ $\phi_A(w, y) = \text{親}$ なので $\phi_A([v], [x]) = \text{親}$ である。道 P' は

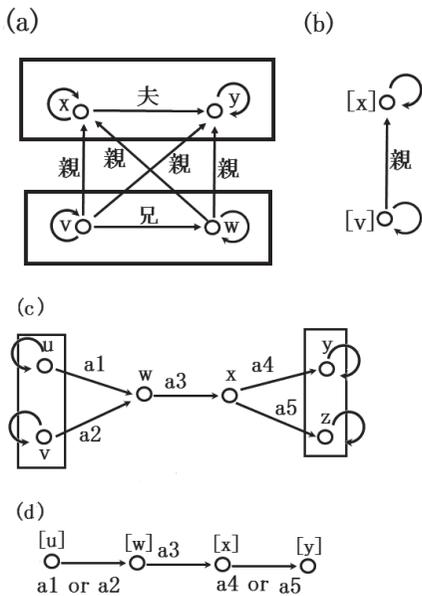
$$P' = ([v], \text{親}, [x])$$

となる。

第 11 図 (b) に同値類を使用した順序グラフを示す。図 (b) は (a) の家族関係を親の世代、子の世代に類別したものである。

第 11 図 (c) は第 8 図の流路のグラフである。上流地点の u と v 、下流地点の y と z をそれぞれ 1 つのグループとしてまとめると、同値類は次のようになる。

$$[u] = \{u, v\}$$



第 11 図 同値類を使用した順序グラフ

図中 (a) は家族関係の順序グラフ、(b) は親の世代、子の世代に類別した場合の順序グラフである。(c) は流路図であり、(d) は上流地点 (u, v) と下流地点 (y, z) をそれぞれグループ化 (類別) した場合の図である。(d) は全順序集合となる。

$$[w] = \{w\}$$

$$[x] = \{x\}$$

$$[y] = \{y, z\}$$

関係は $[u]R^\# [w], [w]R^\# [x], [x]R^\# [y]$ である。

$$[u]R^\# [w] \Rightarrow [u]U^* [w]$$

$$[w]U^* [x] \Rightarrow [w]U^* [x]$$

$$[x]R^\# [y] \Rightarrow [x]U^* [y]$$

推移律から、

$$P = ([u], [w], [x], [y])$$

がもとまる。 P は全順序である。(c) では半順序であるが全順序ではない。このように類別すると全順序となり、形成順序がもとまる。第 6 図 (d) は同値類を用いた順序グラフである。弧 $[u] [w]$ のラベル、すなわち $\phi_A([u], [w])$ は $\phi_A(u, w)$ と $\phi_A(v, w)$ のどちらかであり、一意に決まらない。 $\phi_A([x], [y])$ も同様に一意に決まらない。

地質学の場合、レンズ層と同時異相が同値類になる。レンズ層は母岩と形成時期が同じであり、同時異相も同様に形成時期が同じである。つまり、形成時期が同じであるという基準によりグループ化することになる。

第 12 図に露頭断面の例を示す。対応する層序グラフを各断面の下に示す。

第 12 図 (a) は地質体 x に地質体 y がレンズ状にはさまれている例である。地質体 x が地質体 y をレンズ状にはさんでいる場合、両者の形成時期は同時期であると判断される。地質体の集合は

$$V = \{x, y\}$$

であり、接触関係は xLy である。弧のラベルは

$$\phi_A(x, y) = \text{はさむ}$$

である。形成時期に関する同値類は

$$[x] = \{x, y\}$$

である。層序グラフの位数は 1 になる。

第 7 図 (b) は地質体 y をレンズ状にはさむ地質体 x を、地質体 z が不整合に覆う例である。地質体の集合は

$$V = \{x, y, z\}$$

であり、接触関係は xLy 、 xRz である。弧のラベルは

$$\phi_A(x, y) = \text{はさむ}$$

$$\phi_A(x, z) = \text{不整合}$$

である。形成時期に関する同値類は

$$[x] = \{x, y\}$$

$$[z] = \{z\}$$

である。同値類間の接触関係は $[x]R[z]$ であり、弧のラベルは $\phi_A([x], [z]) = \text{不整合}$ である。新旧関係は

$$[x]R[z] \Rightarrow [x]U^*[z]$$

になる。層序グラフを(b')に示す。

(c)の断面は、地質体 y をレンズ状にはさむ地質体 x に、地質体(深成岩) G が貫入する例である。地質体の集合は

$$V = \{x, y, z, G\}$$

であり、接触関係は xLy 、 yRz 、 xIG 、 zIG である。弧のラベルは

$$\phi_A(x, y) = \text{はさむ}$$

$$\phi_A(x, z) = \text{不整合}$$

$$\phi_A(x, G) = \text{貫入}$$

$$\phi_A(z, G) = \text{貫入}$$

である。形成時期に関する同値類は

$$[x] = \{x, y\}$$

$$[z] = \{z\}$$

$$[G] = \{G\}$$

である。同値類同士の接触関係は、

$$[x]R[z]$$

$$[x]I[G]$$

$$[z]I[G]$$

であり、新旧関係は

$$[x]R[z] \Rightarrow [x]U^*[z]$$

$$[x]I[G] \Rightarrow [x]U^*[G]$$

$$[z]I[G] \Rightarrow [z]U^*[G]$$

となる。これから、各地質体の形成順序として

$$P = ([x], [z], [G])$$

がもとまり、層序は

$$P' = ([x], \text{不整合}, [z], \text{貫入}, [G])$$

となる。対応する層序グラフを(c)に示す。

露頭断面(d)は地質体 x と y が同時異相の関係にある例である。同時異相は形成時期が同じであるが相が異なる地質体である。

地質体の集合は

$$V = \{w, x, y, z\}$$

であり、接触関係は

$$wRx, wRy, xRz, yRz, xDy$$

である。弧のラベルは

$$\phi_A(x, y) = \text{同時異相}$$

$$\phi_A(w, x) = \text{整合}$$

$$\phi_A(w, y) = \text{整合}$$

$$\phi_A(x, z) = \text{不整合}$$

$$\phi_A(y, z) = \text{不整合}$$

である。形成時期に関する同値類は

$$[w] = \{w\}$$

$$[x] = \{x, y\}$$

$$[z] = \{z\}$$

である。同値類同士の接触関係は、

$$[w]R[x]$$

$$[x]R[z]$$

であり、新旧関係は

$$[w]R[x] \Rightarrow [w]U^*[x]$$

$$[x]R[z] \Rightarrow [x]U^*[z]$$

となる。推移律から

$$[w]U^*[x] \wedge [x]U^*[z] \Rightarrow [w]U^*[z]$$

になり、直接接触関係がない $[w]$ と $[z]$ の関係がもとまる。 $[w]$ と $[z]$ の関係は推移律から判断される関係なので、弧は破線で表し、弧のラベルは“推論”とする。

各地質体の形成順序として

$$P = ([w], [x], [z])$$

がもとまる。地質体 z は下位の地質体 x と y の両方とも不整合で接触している。 $\phi_A(x, z) = \text{不整合}$ 、 $\phi_A(x, y) = \text{同時異相}$ である。地質体 x と y は同値類の元であるので、 $\phi_A([x], [z]) = \text{不整合}$ になる。層序は

$$P' = ([w], \text{整合}, [x], \text{不整合}, [z])$$

となる。対応する層序グラフを (d') に示す。

露頭断面 (e) は同時異相の関係にある地質体 w と x が地質体 v を整合に覆い、これらの地質体に y が貫入し、さらにこれらを地質体 z が不整合に覆う例である。

地質体の集合は

$$V = \{v, w, x, y, z\}$$

であり、接触関係は、

$$vRw, vRx, vIy, xIy, wDy, yRz, xRz, wRz$$

である。弧のラベルは

$$\phi_A(w, x) = \text{同時異相}$$

$$\phi_A(v, w) = \text{整合}$$

$$\phi_A(v, x) = \text{整合}$$

$$\phi_A(w, z) = \text{不整合}$$

$$\phi_A(x, z) = \text{不整合}$$

$$\phi_A(y, z) = \text{不整合}$$

$$\phi_A(v, y) = \text{貫入}$$

$$\phi_A(x, y) = \text{貫入}$$

である。形成時期に関する同値類は

$$[v] = \{v\}$$

$$[x] = \{x, w\}$$

$$[y] = \{y\}$$

$$[z] = \{z\}$$

同値類同士の接触関係は、

$$[v]R[x]$$

$$[x]R[z]$$

$$[v]I[y]$$

$$[x]I[y]$$

$$[v]R[z]$$

であり、新旧関係は推論規則から

$$[v]R[x] \Rightarrow [v]U^*[x]$$

$$[x]R[z] \Rightarrow [x]U^*[z]$$

$$[v]I[y] \Rightarrow [v]U^*[y]$$

$$[x]I[y] \Rightarrow [x]U^*[y]$$

$$[v]R[z] \Rightarrow [v]U^*[z]$$

である。

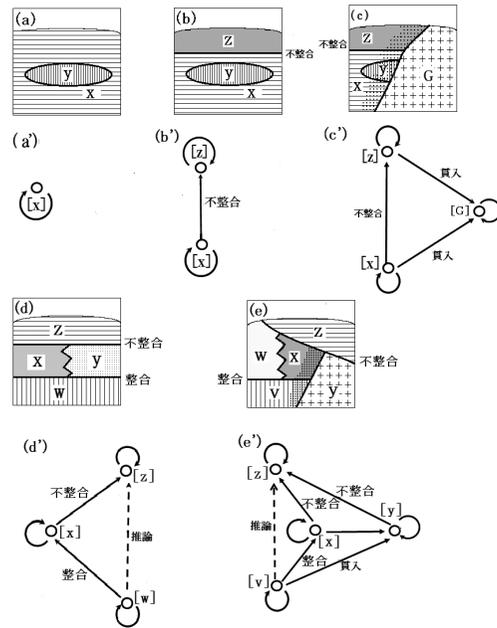
各地質体の形成過程は

$$P = ([v], [x], [y], [z])$$

であり、層序は

$$P' = ([v], \text{整合}, [x], \text{貫入}, [y], \text{不整合}, [z])$$

となる。



第 12 図 同値類を使用した露頭構造の層序グラフ

対応する層序グラフを各露頭断面の下に示す。頂点のラベル $[x]$ は同値類を表す。

4. あとがき

グラフ理論を使用して事象間の構造と形成順序を表現する方法を考察した。構造は任意の 2 つの事象間の関係である。事象が複数存在する場合は相互の事象間の関係である。2 つの事象間の関係を $xR^{\#}y$ で表す。関係に方向性がある場合は有向グラフとなる。関係を表すラベル付き有向グラフは $G = (V, R^{\#}, \phi_V, \phi_A)$ である。 ϕ_V は頂点にラベルを対応させる関数、 ϕ_A は弧にラベルを対応させる関数である。

形成順序は複数の事象間の形成の順序であ

る。つまり、事象間の新旧関係である。形成順序には方向性があるので有向グラフで表現することができる。形成順序は構造から $xR^{\#}y \Rightarrow xU^*y$ で求めることができる。順序グラフは $S = (V, U^*, \phi_V, \phi_A)$ で表すことができる。 U^* は新旧関係 U の反射的かつ推移的閉包であり、半順序である。 U^* が全順序になる場合、すべての事象の形成順序、すなわち新旧順序が求まる。

同値類を使用して事象をグループ化して、グループ間の新旧関係を表現することができる。この場合、順序グラフは、 $S = (V/E^*, U^*, \phi_V, \phi_A)$ で表される。 V/E^* も半順序である。 V/E^* が全順序になる場合、各グループ間の新旧関係が求まる。

このように事象間の構造と順序はラベル付き有向グラフで表現できる。グラフの同一性の問題がある。例えば、2つの家族の構造が同じかどうかはグラフを比較することにより検討できる。また、2つの露頭が同じ構造あるいは層序であるかも2つのグラフを比較することで検討できる。今後はこのグラフの比較の検討を考える必要がある。

文 献

- 惠羅博・土屋守正 (2010) 増補改訂版グラフ理論. 産業図書, pp.12.
- Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (2008) Graph Theory. Springer, pp.79-81.
- 石村園子 (2007) やさしく学べる離散数学. 共立出版株式会社
- 河西秀夫 (2005) 個人用露頭データベースの設計について (3) -層序の表現方法の改善について-. 情報地質, vol.16, no.2, pp.57-68.
- 河西秀夫 (2006) 個人用露頭データベースの設計について (4) -基盤, 被覆層, 互層の理論的背景-. 情報地質, vol.17, no.1, pp.13-27.
- Kasai, H. (2009) Design of geological exposure database -Structure graph: Mathematical model of geological structure of outcrops and regions based on graph theory-. Geoinformatics, vol.20, no.1, pp.17-29.
- 河西秀夫 (2012) グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現. 情報地質, vol.23, no.3, pp.109-120
- 河西秀夫 (2013) グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現-貫入と断層の取り扱い-. 情報地質, vol.24, no.4, pp.161-173
- 河西秀夫 (2015) グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現-レンズ層と同時異相-. 情報地質, vol.26, no.2, pp.37-50
- Rainhard Disetel (2005) Graph Theory 3Rd ed. Springer
- R. ディーステル, 訳根上生也・太田克弘 (2002) グラフ理論. シュプリンガー・フェアラーク東京, pp.20-23
- Tuttle.W.T (2001) Graph Theory, Cambridge Mathematical Library, pp12-130
- Wilson, R. J. (1996) Introduction to Graph Theory, Fifth edition. Longman, pp. 14-27.