極限論の講義についてⅢ
―― トポロジー、ホモロジー、そして圏論 ――

杉　田　勝　実・齊　藤　実

1. はじめに

これまでの二回の論考の結果を出発点として、現代数学には欠かせないモチーフであるトポロジー、ホモロジーについて簡単に述べ、これまた現代数学で発展中の圏論に触れた後、これら三つを結びつける簡単な（といっても実はかなり程度が高い）定理を論証してみようと思う。その定理とは、3 次元球面 S^3 から 2 次元球面 S^2 への連続かつ上への写像に対して、果たして切断は存在するのか、というものである。論考Ⅰ、Ⅱとは違って、一歩一歩ほとんどすべてを着実に説明することは不可能であり、そこには多少の論理的飛躍が含まれてしまっていることをあらかじめお断りしておく。その理由は、論理の飛躍を含まずにこれらの内容を説明するにはとてもとても紙面が足りなく、また、時間的にも許されないことが明らかであるからである。にもかかわらず、このような現代数学の一部を外観した講義を大学初年度にしておくことは、その後の見通しを立てる意味で非常に有意義であると思われる。そのような試みは、未だに何処でもなされていないからである。

さて、写像 $f: X \to Y$ が連続であるとは、Y の任意の開集合 U について、その f による逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合となることであって、そこで、X と Y は距離空間であった。しかしこれからは、より広い空間である位相空間を考えていくことにする。距離空間は、実は位相空間のひとつなのである。

2. 位相空間と連続写像

〈位相空間の定義〉

位相空間とは、ある集合 X と、以下の公理を満たす X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ との組のことである。

公理Ⅰ：開集合の任意の和集合は開集合である。すなわち、

$$\lambda \in \Lambda,\ O_\lambda \in \mathcal{O} \ \Rightarrow\ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$$

公理Ⅱ：有限個の開集合の共通部分は開集合である。すなわち、

$$O_1, O_2, \cdots, O_k \in \mathcal{O} \ \Rightarrow\ O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathcal{O}$$

公理Ⅲ：ϕ と X は開集合である。

族 $\mathcal{O}$ を、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の位相という。以後、簡単のために、$(X, \mathcal{O})$ を単に位相空間 X と記すことにする。距離空間同様、X の要素は点と呼ばれる。論考Ⅱでも述べたが、かなり多くの位相空間が距離化定理により、距離空間にできることが分かっている。

実は、この他にも位相空間の定義は可能である。ひとつは、閉集合を用いたものであり、これは、閉集合と開集合との関係から直ちに書き記すことができるものである。更に、Hausdorff の近傍による公理を用いた定義も可能であり、これは前のものより若干詳しく記したものになっている。また、Kuratowski の閉包公理を用いた定義は、よりエレガントなものになっている。いずれにしても、どの定義を用いたにしても全く同様に、以下の議論が成り立つ。

次に、論考Ⅱで距離空間に関して導いておい

た連続写像について、ここで改めて、位相空間に対しての定義として記すことにする。

〈連続写像の定義〉

XとYを位相空間とする。写像$f: X \rightarrow Y$において、もしYの任意の開集合Uについて、そのfによる逆像$f^{-1}(U)$がXの開集合となるならば、そのとき、fを連続写像であるという。

ここで、その意味を理解し易くするために、連続写像の例をいくつか挙げておく。

〈例１（定値写像）〉

Xのいずれの点にもYの定まった一点y_0を対応させる写像$f: X \rightarrow Y$を、定値写像という。これは連続である。

証明））y_0を含む任意の開集合のfによる逆像は、明らかにXであるから、定義により開集合である。また、y_0を含まない開集合のfによる逆像は空集合ϕであるから、これも開集合である。よって、Yの任意の開集合のfによる逆像が開集合となるので、fは連続である。

〈例２（恒等写像）〉

Xの個々の点に、その点自身を対応付ける写像$Id_X : X \rightarrow X$を、Xの恒等写像という。これは連続である。

証明））自明。敢えて述べれば、Xの任意の開集合のId_Xによる逆像は、また同じ集合であるから、それはXの開集合となる。よって、連続。

〈例３（合成写像）〉

$f: X \rightarrow Y$及び$g : Y \rightarrow Z$の合成写像$gof : X \rightarrow Z$は、fとgが連続ならば連続となる。

証明））Zの任意の開集合Uに対して、

$$(g \circ f)^{-1}(U) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(U) = f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$$

であるが、まずgの連続性から、$g^{-1}(U)$はYの開集合となり、更に、fの連続性から、$f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$は$X$の開集合となる。よって、合成写像は連続である。

3. 同相写像とトポロジー

〈同相写像の定義〉

全単射である写像$f: X \rightarrow Y$において、fとf^{-1}の両方ともが連続であるとき、fを同相写像であるという。

ここで、全単射という言葉を用いているが、これは集合論でいうところの単射かつ全射であり、Xの点とYの点とが一対一に一つずつ残らず対応しているということである。定義より明らかなように、fが同相写像であれば、f^{-1}も同相写像であるということがわかる。

〈位相同型の定義〉

位相空間XとYの間に同相写像が存在すれば、それらは位相同型であるといい、$X \cong Y$と記す。また、単にそれらは同相であるともいう。

〈例１〉

実数の単位区間［$0, 1$］と任意の閉区間［a, b］との間には明らかに同相写像が存在するので、それらは同相である。開区間同士の間にも同相写像が存在するので、それらは同相である。この際、1次元 Euclid 空間の通常の位相として、開集合族、つまり開区間の集合を考えていることに注意。

〈例２〉

円周S^1と任意の三角形の周囲T^1との間には同相写像が存在するので、それらは同相である。

〈例３〉

円板D^2と任意の三角形Δ^2との間には同相写像が存在するので、それらは同相である。

例２、例３から推察されるように、右上の添

え字は図形の次元を表しているということが分かるであろう。実は、このような例は無数にたくさん考えることができる。ここまでくると、なにゆえに位相同型などというものを考えてきたのかがわかってくると思う。このような問題を数多く考え、位相同型なものは「同じ」図形とし、違うものは「異なる」図形として、同相というひとつの尺度によって様々な図形を分類するのが、トポロジーの目的の一つなのである。

以上、トポロジーの導入部を述べてきたが、より先に進もうとすると、次の三つの概念が重要になってくる。それは、連結性、コンパクト性、そしてHausdorff性（分離可能性）である。しかし、それらについては割愛する（文献12参照）。

ところで、極限論の論考として、Ⅰ、Ⅱでは一歩ずつ着実に歩みを進めて来たため、その証明は簡単ではあっても結構面倒であったのではないかと思う。ここにきて何か急に易しくなってきたなという印象を受けると思う。厳密に数学的に定式化することは、簡単な題材（例えば連続性のような）でも非常に大変なのであるが、逆にその基礎となることをしっかりと把握してしまうと、様々な問題に適用することが意外に容易くなる場合があるのである。また、低いレベルの数学のみを用いて問題を解こうとすると、結構難しいのに、高いレベルの数学を用いて問題を解くと、意外に簡単であったという経験をお持ちの方も多いと思う。例えば、偏差値の高い中学校入試の文章問題などは、小学校レベルの数学の知識で解くには大変に難しいのであるが、中学校レベルの連立一次方程式を用いて解いてみると非常に簡単になる場合がある。数学にはそのような一面があるのである。本論考の最後にひとつの定理を証明しようと思うが、それも同じ範疇の問題なのである。

4. ホモロジー

ホモロジー、より正確にホモロジー群とは、位相空間を調べるひとつの道具である。ここでは簡単のために、位相空間Xは三角形分割が可能であると仮定する。次の定理が成立する。

〈分割定理〉

位相空間Xに二通りの三角形分割があり、それらのひとつをX_1とし、もう一つをX_2

とすると、ホモロジー群H_kに対して、

$$H_k(X_1,\mathbf{Z}) = H_k(X_2,\mathbf{Z}) \tag{1}$$

が成立する。そこで、k=0, 1, 2,…であり、Zは整数全体の集合（整数環）である。この定理の意味するところは、ホモロジー群は三角形分割の仕方には依存しない、ということを述べているのである。証明は省略する（文献15参照）。

さて、位相空間X上に三角形分割が与えられたとして、各頂点（0-単体）をA_1, A_2, …, A_p、辺（1-単体）をB_1C_1, B_2C_2…, B_qC_q、面（2-単体）を$D_1E_1F_1$, $D_2E_2F_2$…, $D_rE_rF_r$とする。更なる高次元の単体についても同様に定義してやる。例えば3-単体は四面体と考えればよい。このとき、0-単体の整数を係数とする線形結合$\sum_{i=1}^{p} a_i A_i$を0-鎖、1-単体の同様の線形結合$\sum_{i=1}^{q} b_i (B_i C_i)$を1-鎖、2-単体の線形結合$\sum_{i=1}^{r} c_i (D_i E_i F_i)$を2-鎖等々と呼ぶことにする。次に向きを定義しておく。例えば、ABはAからBに向かう辺であると解釈し、$AB=-BA$とする。また、ABCについても$ABC=-BAC$等とする。更に、線形作用素として、境界作用素∂を定義する。この作用素は式

$$\partial A = 0$$
$$\partial(AB) = B - A$$

を満足する。これらは直感的に、頂点に境界はなく、辺の境界は二つの点であると考えれば納得できるであろう。特に第二式は、まずABからAを省きBとし、そしてそれに、ABからB

を省いて－をつけたもの、つまり $-A$ を足したものであると解釈できる。同様にして、

$$\partial(ABC) = BC - AC + AB = AB + BC + CA$$

が得られる。以上のことから、

$$\partial^2 = 0$$

が導かれる。

証明）) $\partial A = 0, \partial B = 0$ より、

$$\partial^2 A = 0$$

$$\partial^2(AB) = 0$$

は明らか。そして、

$$\partial^2(ABC) = \partial(BC - AC + AB) = C - B - (C - A) + B - A = 0$$

が成り立つ。

ここで、より正確に、∂ に被作用素の次元を添え字として書き込むことにする。例えば、$(\partial_0 \circ \partial_1)(AB) = 0,\ (\partial_1 \circ \partial_2)(ABC) = 0$ などである。そして一般には、

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \qquad (2)$$

となるのである。これで漸く輪体（サイクル）の定義ができる段取りとなった。

k 次元輪体とは、$\partial_k c = 0$を満たす k- 鎖 c のことである。そして k 次元輪体全体の集合、すなわち$Ker\partial_k$のことを k 次元輪体群という。$Ker\partial_k$とは作用素∂_kの核のことである。ここで、もし、二つの輪体 c_1, c_2 がある $(k+1)$- 鎖 b に対して、

$$c_1 - c_2 = \partial_{k+1} b$$

を満たすならば、そのとき c_1 と c_2 はホモローグであるといい、それらを同じものとみなし、$c_1 \cong c_2$と記す。すなわち、c_1 と c_2 を同じ類（同値類）に入れるのである。そうして得られた群を k 次元ホモロジー群 $H_k(X, \mathbf{Z})$ と表す。つまり、

$$H_k(X, \mathbf{Z}) = \frac{Ker\,\partial_k}{\mathrm{Im}\partial_{k+1}} \qquad (3)$$

である。ここで　$\mathrm{Im}\partial_{k+1}$とは作用素　∂_{k+1}による像のことである。

〈例 1〉

試みにもし、0 次元輪体 A と B がひとつの折れ線 c で結ばれている場合を考えてみると、それらの点は c の境界輪体になっており、$\partial_1 c = B - A$ が成立するので、定義から A と B はホモローグということになる。何らかの位相空間 X 上の任意の点に対して、このようなことが言えた場合には、0 次元ホモロジー群 $H_0(X, \mathbf{Z})$ はたった一つの点の線形結合で表され、

$$H_0(X, \mathbf{Z}) = \{\, nA \mid n \in \mathbf{Z} \,\} \cong \mathbf{Z} \qquad (4)$$

となる。

次に、具体的に、2 次元球面 S^2 の 2 次元ホモロジー群 H_2 を考察してみる。ここで、S^2 とは、3 次元 Euclid 空間 R^3 における点の集合 $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ のことである。$\partial_2 S^2 = 0$ より S^2 は 2 次元輪体であることが分かる。そこで、三角形全体 $\{\Delta_i\}$で球面全体を覆っていると考えて、2- 鎖

$$c = \sum_i a_i \Delta_i \qquad a_i \in \mathbf{Z},\quad \Delta_i : \text{triangle} \qquad (5)$$

を定義する。これが 2 次元輪体になるためには、$\partial_2 c = 0$が成立する必要がある。その際問題となるのは、係数 a_i である。隣り合った二つの三角形$\Delta_1 = ABC$と$\Delta_2 = BDC$に注目してみると、辺 BC がこれら二つの三角形の境界となっていることがわかる。そして、三角形の向きを全て一致させておくと、$\partial_2(ABC)$からは BC が、$\partial_2(BDC)$からは$-BC$が出現するので、都合良く、向かい合っている辺からの寄与が相殺することになる。しかしもし、$a_1 \Delta_1 + a_2 \Delta_2$において、$a_1 \neq a_2$であったならば、$\partial_2 c = 0$が得られないことになってしまう。よって、$a_1 = a_2$でなければならない。こうして、全ての a_i が一つの整数、例えば n に等しくなければならないという結論になる。従って、

$$c = n \sum_i \Delta_i \qquad n \in \mathbf{Z}$$

である。一方、三角形全体$\{\Delta_i\}$がS^2を覆っていることから、

$$S^2 = \sum_i \Delta_i$$

と記すことにすると、$\partial_2 S^2 = 0$と$\partial_2 c = 0$は無矛盾に成り立つことがわかる。また、$\dim S^2 = 2$であるから、S^2上に3-鎖は存在しない。よって、$\mathrm{Im}\partial_3 = \{0\}$。これより定義式においては、$Ker\partial_2$のみを考慮すればよく、結局

$$H_2\left(S^2, \mathbf{Z}\right) = \{\, n\sum_i \Delta_i \mid n \in \mathbf{Z} \,\} \cong \mathbf{Z} \tag{6}$$

が得られる。

本節の最後に、$H_2\left(S^3, \mathbf{Z}\right)$を求めておく。$S^3$は4次元Euclid空間$\mathrm{R}^4$における点の集合$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right\}$のことである。ここでは説明しないが、変位レトラクトと切除定理を用いると（文献14参照）、

$$H_2\left(S^3, \mathbf{Z}\right) = H_1\left(S^2, \mathbf{Z}\right) \tag{7}$$

が成立することがわかるので、$H_1\left(S^2, \mathbf{Z}\right)$を求めればよい。まずは$S^2$上の1-鎖、すなわち曲面上の曲線（折れ線でよい）の線形結合を考える。それを$Ker\partial_1$の元とするためには、境界となる点がなくなればよいので、結局ループの線形結合を考えればよいことになる。つまり、1次元輪体はS^2上のループの線形結合ということになる。ところが、これまでの議論と同様に考えてみればすぐにわかるように、いかなるループも互いにホモローグであり、かつそれは、1点に縮めることが可能なので、S^2上に輪体は存在しないということになってしまう。つまり、

$$H_1\left(S^2, \mathbf{Z}\right) \cong \{0\} \tag{8}$$

が得られる。よって、(7)式から

$$H_2\left(S^3, \mathbf{Z}\right) \cong \{0\} \tag{9}$$

が結論される。

さて、ホモロジーについての解説はこれくらいにして、最終目標であった切断に関する定理に向かうことにしよう。しかしそのためには、もうひとつの山を越えねばならない。それが圏論である。

5. 圏論

〈圏（カテゴリー）の定義〉

圏$\mathcal{C}$とは、次の要目から成り、以下の公理Ⅰ、Ⅱを満たすものである。

ⅰ）数学的対象の全体$Ob(\mathcal{C})$

$Ob(\mathcal{C})$の元を圏$\mathcal{C}$の対象という。但し、$Ob(\mathcal{C})$は集合とは限らない。

ⅱ）対象の任意のペア（X, Y）に対し、それぞれ定まった集合$Mor(X, Y)$

$Mor(X, Y)$の元を、XからYへの射という。それを$f \in Mor(X, Y)$と記したり、$f : X \to Y$と記したりする。但し、その際X, Yは集合である必要もないし、fが写像でなければならないということもない。

ⅲ）任意の三つの対象X, Y, Zに対する合成

$$Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z) \to Mor(X, Z),\ (f, g) \mapsto g \circ f \tag{10}$$

〈公理Ⅰ（結合律）〉

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} U$が射であるならば、そのとき$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$が成り立つ。

〈公理Ⅱ（恒等射）〉

各対象Xに対し、ひとつの射$Id_X \in Mor(X, X)$が存在して、全ての射$f : Y \to X$と$g : X \to Z$に関する特殊な性質$Id_X \circ f = f$及び$g \circ Id_X = g$が成り立つ。

これらの定義は大変に抽象的であり奇妙にすら見えるかもしれないので、この論考を読んでいる方々の理解に資するために、いくつかの簡単な例を挙げることにする。実は、すでに馴染みのあるものの言い換えに過ぎないものが多いのである。

〈例１（集合の圏）〉

対象は集合、射は写像である。これはあまりにも当たり前すぎる。

〈例２（トポロジー的カテゴリー）〉

対象は位相空間、射は連続写像である。これもすでに馴染みのあるものである。

〈例３（群の圏）〉

対象は群、射は準同型写像である。

〈例４（K 上ベクトル空間のカテゴリー）〉

対象は K- ベクトル空間、射は K- 線形写像である。

以上の例が定義の公理Ⅰ、Ⅱを満たすことはほとんど自明であろう。これらの例は単なる言い換えに過ぎないかもしれないが、実は次に定義する関手なるものを使うと思わぬ発見に繋がることがあるのである。もちろん、カテゴリー自身としてもっと奇妙なものを考えることもできるが、ここでは割愛する。それでは関手の定義に入る。

〈共変関手の定義〉

$\mathcal{C}$と$\mathcal{D}$とを圏とする。共変関手$\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$とは、次の「対応付け」のことである。つまり、$\mathcal{C}$の任意の対象 X に対して$\mathcal{D}$の対象 $\mathcal{F}(X)$ が定義され、そして$\mathcal{C}$の任意の射 $\varphi : X\to Y$ に対して$\mathcal{D}$の射 $\mathcal{F}(\varphi):\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ が定義されており、以下の条件が成立するとき、$\mathcal{F}$を共変関手というのである。

ⅰ）$\mathcal{F}(Id_X)=Id_{\mathcal{F}(X)}$

ⅱ）$\mathcal{F}(\varphi\circ\psi)=\mathcal{F}(\varphi)\circ\mathcal{F}(\psi)$

〈反変関手の定義〉

全く同様にして、反変関手$\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$も定義できる。$\mathcal{C}$の任意の対象 X に対して$\mathcal{D}$の対象 $\mathcal{F}(X)$ が定義され、$\mathcal{C}$の任意の射 $\varphi : X\to Y$ に対して$\mathcal{D}$の射が $\mathcal{F}(\varphi):\mathcal{F}(Y)\to\mathcal{F}(X)$ で定義されており、以下の条件が成立しているとき、$\mathcal{F}$を反変関手というのである。

ⅰ）$\mathcal{F}(Id_X)=Id_{\mathcal{F}(X)}$

ⅱ）$\mathcal{F}(\varphi\circ\psi)=\mathcal{F}(\psi)\circ\mathcal{F}(\varphi)$

この反変関手の実に巧みな例は、K を数体とした K- ベクトル空間 V とその双対空間 V^* とを結びつけるものである。V と V^* の元は、実ベクトル空間では列（縦）ベクトルと行（横）ベクトルであり、複素ベクトル空間では行ベクトルは更にその複素共役をとったものとなっている。より一般的に、ケット $|a\rangle$ とブラ $\langle b|$ であるといってもよい。$\mathcal{C}$ を K- ベクトル空間のカテゴリー、$\mathcal{D}$ をその双対空間のカテゴリーとする。そのとき、反変関手 $\mathcal{F}$ は双対を表す * となっている。具体的には、K- ベクトル空間のカテゴリー$\mathcal{C}$の対象を V, W とし、その射を $f:V\to W$とするならば、対応する$\mathcal{D}$の対象は V^*, W^* であり、射は$f^*: W^*\to V^*,\ \alpha\mapsto f^*(\alpha)=\alpha\circ f$ となっている。ここで$f^*(\alpha)$はfによる α の引き戻しである。このとき、$\mathcal{C}$における合成射 $g\circ f$ は$\mathcal{D}$における合成射 $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$ に対応しているので、関手$*:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$は正に反変となっているのである。

次に、関手の最大の特徴である不変性について述べておく。逆射を有する射を圏の同型射といい、それらの間に同型射が存在するような対象は同型であるといわれる。例えば、トポロジー的カテゴリーでは、もし二つの位相空間が同相であるならば、それらは同型であるということになる。以後、反変の場合も同様であるから、共変関手についてのみ記すことにする。もし、$\mathcal{C}$の中の射 $f:X\to Y$ が同型射であったとするならば、関手$\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$により対応する$\mathcal{D}$の中の射 $\mathcal{F}(f)$ も同型射となる。

証明））f が同型射であることから、その逆 g

が存在する。つまり、$g\circ f = Id_X$, $f\circ g = Id_Y$が成り立つ。よって、関手の定義から、

$$g\circ f = Id_X \Rightarrow \mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g\circ f) = \mathcal{F}(Id_X) = Id_{\mathcal{F}(X)} \quad (11)$$

及び

$$f\circ g = Id_Y \Rightarrow \mathcal{F}(f)\circ\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f\circ g) = \mathcal{F}(Id_Y) = Id_{\mathcal{F}(Y)} \quad (12)$$

が言える。すなわち、$\mathcal{F}(g)$が$\mathcal{F}(f)$の逆射になっているので、逆が存在することになり、射$\mathcal{F}(f)$は同型射となるのである。

つまり、$X\cong Y$であれば、必然的に$\mathcal{F}(X)\cong\mathcal{F}(Y)$が言えるのである。これが関手の不変性である。ここからは、より具体的にするために、$\mathcal{C}$をトポロジー的カテゴリーとし、$\mathcal{D}$はAbel群（可換群）のカテゴリーであるとする。そして関手としては、2次元ホモロジー群H_2を採用することにする。

6. 切断に関する定理

〈定理〉

π σをS^3からS^2への連続でかつ上への写像とした場合、その切断σは存在しない。ここで、上への写像とは全射のことであり、切断とは$\pi\circ\sigma = Id_{S^2}$を満たす連続写像のことである。

証明))S^2やS^3を対象とするトポロジー的カテゴリーを$\mathcal{C}$とする。そして$\mathcal{D}$は、2次元ホモロジー群H_2によって対応付けられたAbel群のカテゴリーであるとする。そこで、S^2からS^3へ、そしてまたS^3からS^2へ戻るような合成射

$$S^2 \xrightarrow{\sigma} S^3 \xrightarrow{\pi} S^2 \quad (13)$$

を考え、$\pi\circ\sigma = Id_{S^2}$となる切断$\sigma$が存在したと仮定する。そのとき、関手の定義から、

$$H_2(S^2) \xrightarrow{H_2(\sigma)} H_2(S^3) \xrightarrow{H_2(\pi)} H_2(S^2) \quad (14)$$

も恒等射$Id_{H_2(S^2)}$にならなければならない。ここでは偏角のZを省いて書いた。ところが、第4節で計算しておいたように、

$$H_2(S^2) = H_2(S^2, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}、\quad H_2(S^3) = H_2(S^3, \mathbf{Z}) \cong \{0\}$$

であったから、⒁式は、

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{H_2(\sigma)} \{0\} \xrightarrow{H_2(\pi)} \mathbf{Z} \quad (15)$$

となり、この合成射が恒等射になる必要がある。これは明らかに成立しない。従って、S^3からS^2への連続全射写像πは、切断を持つことはできないのである。

こうして、第1節で述べた切断に関する定理の証明が完成したわけであるが、途中の経路は非常に長く、面倒に感じたと思われる。しかしながら、最終の証明は実に簡潔明快であったのではないだろうか。出発点が、「位相」の言葉による射fの連続性であったことを思えば、随分と高い頂きに到達した感がある。登山と同様、一歩一歩着実に登ることは辛く大変なことであるが、頂きに到達し、周りを見回したときの達成感、爽快感はなんとも形容しがたいものがある。数学の醍醐味、面白さとは、そのようなものであろう。

7. おわりに

論考Ⅰ、Ⅱ、Ⅲによって、高等学校と大学初年次の講義を繋ぐ解説が完成したのであるが、実際には、大学初年次のレベルに留まらず、分野によっては、大学院程度のレベルにまで達していると思われる。ここで強調しておきたかったことは、大学数学の入門編をしっかりと着実にやり、ほとんどが理解できたとすれば、かなり先端にまで到達することができるのである、ということである。ところが、現在の大学教育は、あまり学ぶ者の立場に立っていないので、かなりの標高のところから講義が始まってしまい、大半の学生が初年度の数学からすでについていけなくなってしまっているという実態である。このことは、本人の体たらくであり、最初から学ぶ意欲に欠けるような学生を対象として

言っているのではなくて、相当レベルの高い学生であっても、かような実態であるということに問題があるのである。確かに、現代数学はかなり進歩してしまい、今のような初等教育をしていたのでは、到底大学レベルでも最先端には到達できない。しかし、だからといって、高等学校と大学数学の間に大きなギャップがあってよいという理屈にはならない。そこを埋めなければ、かなりのところにまで到達できるのであるということを、これらの論考を通して示したかったのである。

［参考文献］

１．杉田勝実、齊藤実：「極限論の講義について」、経営情報学論集山梨学院大学（2012）.
２．杉田勝実、齊藤実：「極限論の講義についてⅡ」、経営情報学論集　山梨学院大学（2013）.
３．高木貞治：解析概論、改訂第三版、 岩波書店（1961）.
４．能代　清：極限論と集合論、改版、岩波書店（1970）.
５．杉田勝実　：「解析学基礎Ⅰ、Ⅱ」講義ノート（2008）.
６．松本幸夫：トポロジー入門、岩波書店（1985）.
７．内田伏一：集合と位相、第９版、裳華房（1994）.
８．長野　正：曲面の数学、培風館（1968）.
９．松本幸夫：多様体の基礎、東京大学出版会（1988）.
10. 杉田勝実、岡本良夫、関根松夫：経路積分と量子電磁力学、森北出版（1998）.
11. 上野健爾：代数幾何 1、岩波書店（1997）.
12. Klaus Jänich : Topologie、Achte Auflage — auf Deutsch —、Springer（2004）.
13. 杉田勝実、岡本良夫、関根松夫：理論物理のための微分幾何学（可換幾何学から非可換幾何学へ）、森北出版（2007）.
14. ナッシュ、セン著、佐々木隆監訳、南部保貞、吉井久博訳：物理学者のためのトポロジーと幾何学、マグロウヒル（1989）.
15. Atiyah, M.F. and Ward, R.S. : Comm. Math. Phys. 55, 117（1977）.